


**Estudio experimental y modelización numérica del comportamiento frente a tensiones tangenciales de elementos de hormigón armado y hormigón armado y reforzado con fibras de acero**

Por:  
Eduardo José Mezquida Alcaraz

Febrero 2015.

Autor / Author: Eduardo José Mezquida Alcaraz		Fecha / Date: 25/02/2015	
Título / Title <b>Estudio experimental y modelización numérica del comportamiento frente a tensiones tangenciales de elementos de hormigón armado y hormigón armado y reforzado con fibras de acero</b>			
Directores del trabajo / Supervisores: Juan Navarro Gregori		Código / Code: CST/MIH-XX	Nº páginas / Pages: 328
Departamento / Departament: INGENIERÍA DE LA CONSTRUCCIÓN Y PROYECTOS DE INGENIERÍA CIVIL			
Universidad / University: UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA			 UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
Palabras clave / Keywords: Esfuerzo cortante, tensiones tangenciales, push-off, plano de corte, deformaciones, distorsiones, deslizamiento, hormigón armado, hormigón armado y reforzado con fibras de acero, fibras de acero, fisuración, armadura de cortante, ensayo experimental, fotogrametría, modelo material, elementos finitos			
Código Unesco: 3305/05 - Ciencias tecnológicas / Tecnología de la construcción / Tecnología del hormigón			



## RESUMEN

No resulta fácil plantear el estudio del esfuerzo cortante de un modo aislado. En la gran mayoría de las situaciones estructurales que se pueden plantear en la realidad, el esfuerzo cortante siempre va acompañado e interactúa con otros esfuerzos como pueden ser los esfuerzos normales (axil y flector), torsor, rasante,... Además, existen numerosos factores que pueden afectar a la resistencia a corte de una determinada pieza de hormigón armado (RC): diámetro de las barras de armado, la adherencia de las barras dentro de la matriz, el efecto pasador de las barras, el engranamiento de áridos, el tipo de cemento,... Si se trata de hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC), además de los factores propios del hormigón armado ya descritos, se añaden los de las fibras: diámetro y longitud de las fibras, resistencia a la rotura, cantidad de fibras, orientación, adherencia,... Por las razones mencionadas, resulta difícil aislar el esfuerzo cortante y acotar el problema con el objetivo de parametrizar su comportamiento.

A lo largo de la historia se han llevado a cabo distintos modos de enfocar el problema, todos ellos relacionados. Por una parte, se han desarrollado campañas de ensayos experimentales con probetas de distintas formas: paneles, probetas tipo *push-off* (con y sin fisuración previa), probetas tipo *pull-off*, vigas a cortante,... cuyas formas y modos de carga tienen como objetivo forzar al máximo la respuesta a corte. Paralelamente se van obteniendo, en función de los parámetros que se consideren y de los resultados experimentales, numerosas expresiones empíricas y modelos materiales y numéricos a través de distintas teorías con los que se pretende modelar el comportamiento teórico de dicho esfuerzo.

En este Trabajo Final de Máster se pretende colaborar en el estudio del esfuerzo cortante tanto en piezas de RC como de SFRC. Para ello se lleva a cabo una campaña experimental con diez probetas tipo *push-off* sin fisuración previa con la que se obtiene información mediante diferentes técnicas de medida: fotogrametría, puntos demec y transductores de desplazamiento. También se realiza un modelado como punto material y mediante elementos finitos de las piezas utilizadas en la campaña experimental. Para el RC se utiliza un modelo constitutivo de la literatura mientras que para el SFRC se realiza una propuesta de modelo propia.

## RESUM

No resulta fàcil plantejar l'estudi de l'esforç tallant de forma aïllada. En la gran majoria de les situacions estructurals que es poden trobar en la realitat, l'esforç tallant sempre va acompanyat e interactua amb altres esforços com poden ser els esforços normals (axial i flector), torsor, rasant,... A més a més, existeixen nombrosos factors que poden afectar a la resistència a tallant d'una determinada peça de formigó armat (RC): diàmetre de les barres d'armat, l'adherència de les barres dins de la matriu, l'efecte passador de les barres, l'engranament d'àrids, el tipus de ciment,... Si es tracta de formigó armat i reforçat amb fibres d'acer (SFRC), a més a més dels factors propis del formigó armat ja descrits abans, deuriem tenir-se en compte els propis de les fibres: diàmetre i longitud de les fibres, resistència al trencament, quantitat de fibres, orientació, adherència... Per aquestes raons resulta difícil aïllar l'esforç tallant i acotar el problema amb l'objectiu de parametritzar el seu comportament.

Al llarg de la història s'han dut a terme diferents modes d'enfocar el problema, tots ells relacionats. Per una banda, s'han generat campanyes d'assajos experimentals amb provetes de diferents formes: panells, provetes tipus *push-off* (amb i sense fisuració prèvia), provetes tipus *pull-off*, bigues a tallant, ... les formes i els modes de càrrega dels quals tenen com a objectiu forçar al màxim la resposta a tallant. Paral·lelament es van obtenint, en funció dels paràmetres que es consideren i dels resultats experimentals, nombroses expressions empíriques i models materials i numèrics per mitjà de diferents teories amb els que es pretén modelar el comportament teòric de l'esforç tallant.

En aquest Treball Fi de Màster es pretén col·laborar en l'estudi de l'esforç tallant tant en peces de RC com de SFRC. Per aquest motiu, es porta a terme una campanya experimental amb deu provetes tipus *push-off* sense fisuració prèvia amb la que s'obté informació mitjançant diferents tècniques de mesura: fotogrametria, punts demec i transductors de desplaçament. També es realitza una modelització com a punt material i mitjançant elements finits de les peces utilitzades en la campanya experimental. Per al RC s'utilitza un model constitutiu de la literatura mentre que per al SFRC es realitza una proposta de model pròpia.

## SUMMARY

It is very difficult to carry out the study of the shear without the interaction of other forces. In the vast majority of the real structural situations shear goes together with other forces as axial force, flexural moment, torsion... Moreover there are other factors that can affect the shear response of a reinforced concrete (RC) specimen: the diameter of the reinforcement steel bars, bond conditions of the steel bars in the concrete matrix, aggregate interlock, dowel action, kind of cement,... In steel fibre reinforced concrete (SFRC) specimens other factors can also be considered: length and diameter of the steel fibres, fibre failure strength, the amount of fibres in the concrete matrix, orientation, bond conditions of the steel fibres in the concrete matrix,... For these reasons it is difficult to understand the individual shear conditions and define the shear problem.

Different ways to carry out the shear study are followed in the literature. On the one hand there are experimental investigations using different types of shear specimens: panels, *push off* tests (initially cracked or initially uncracked specimens), *pull off* tests, shear beams,... The objective of the different form of the specimens and the different load modes is to obtain the more approximate pure shear response. On the other hand and at the same time, empirical simple shear strength equations and shear behavior numerical models are generated. The different concrete parameters considered and the experimental results obtained lead to the different equations and theoretical models to represent the shear response.

The purpose of this work is to contribute to the shear response investigation of the RC and SFRC. For this, an experimental investigation is carried out. Ten initially uncracked *push off* specimens are tested. A special insight in the analysis of the region close to the shear plane has been carried out. The displacements at different locations have been measured by means of a photogrammetric technique and calibrated comparing with Demec and LVDTs. A numerical modeling of the push-off specimens tested has been carried out. Two types of models are used: a material model and a finite element model.

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar me gustaría agradecer a mi tutor, el profesor Juan Navarro Gregori, su ayuda en todo momento y su plena confianza. Me gustaría agradecer no sólo su inestimable labor como profesor tutor sino también su amistad. Gracias a su paciencia y a su plena dedicación en cualquier momento hoy entiendo mucho mejor el mundo de la investigación "Moltes gràcies per tot, Juan".

Además quisiera agradecer al proyecto correspondiente a la convocatoria de Primeros Proyectos de Investigación 2011 de la Universitat Politècnica de València (PAID-06-11. Registro de entrada: 2028). Por medio de este proyecto y del ICITECH conseguí la beca de colaboración con la empecé esta Tesina Final de Máster.

También me gustaría agradecer a los profesores Pedro Serna Ros, Pedro F. Miguel Sosa y Luis Pallarés Rubio por facilitarme los medios para llevar a cabo las distintas fases de la tesina.

Quisiera dedicar un sentido agradecimiento a algunos amigos que han sido importantes para mí en la realización de este trabajo. A Javier Echeagaray por su amistad y su ayuda desinteresada en la preparación de los ensayos *push-off* de la parte experimental, a Javier Reig por su amistad, su apoyo moral, logístico y sus buenos consejos y a Ernesto Torregrosa por su amistad y su apoyo durante el largo tiempo que hemos compartido piso en la capital.

Quisiera también agradecer a toda mi familia. Ellos hacen que todo sea más fácil solamente formando parte de mi vida. Me gustaría tener una especial mención a tres familiares que los he perdido recientemente y sé que han estado y de algún modo continúan estando ahí: mi abuelo José, mi abuela Concordia y mi tío Leo.

Por último y más importante para mí, me gustaría agradecer quien soy y lo lejos que he llegado a mis padres Eduardo y Joana y a mi hermana Cristina. Ellos son y han sido el pilar más importante en mi vida y los que han hecho posible que sea capaz de alcanzar mis metas, por duras que sean. Gracias por vuestro apoyo y paciencia sin límites.

Eduardo J. Mezquida Alcaraz.

Febrero 2015.

# ÍNDICE

<b>Capítulo 1: Introducción y objetivos .....</b>	<b>1</b>
1.1. Marco general .....	1
1.2. Objetivos .....	2
1.3. Importancia de la investigación .....	2
1.4. Contenido del documento .....	3
<b>Capítulo 2: Estado del arte.....</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción. ....	5
2.2. Tipologías de ensayos para el estudio del esfuerzo cortante. ....	5
2.2.1. Paneles. ....	5
2.2.2. Ensayos tipo <i>push-off</i> . ....	6
2.2.3. Ensayos tipo <i>pull-off</i> . ....	8
2.2.4. Vigas. ....	8
2.3. Síntesis general .....	9
2.4. Estudios experimentales, modelización y teorías sobre la transmisión del esfuerzo cortante para hormigón armado. ....	13
2.4.1. J.A. HOFBECK, I.O. IBRAHIM y ALAN H. MATTOCK (1969) .....	13
2.4.2. ALAN H. MATTOCK and NEIL M. HAWKINS (1972).....	16
2.4.3. ALAN H. MATTOCK, L. JOHAL and H. C. CHOW (1975).....	22
2.4.4. ALAN H. MATTOCK, W. K. LI and T. C. WANG (1976) .....	24
2.4.5. J. C. WALRAVEN (1981) .....	26
2.4.6. F.J. VECCHIO and M. P. COLLINS (1981) .....	30
2.4.7. F.J. VECCHIO and M. P. COLLINS (1986) .....	36
2.4.8. THOMAS T.C. HSU, S.T. MAU, and BIN CHEN (1987). ....	45
2.4.9. F.J. VECCHIO and M. NIETO (1991) .....	53
2.4.10. F.J. VECCHIO (2000).....	56
2.4.11. F.J. VECCHIO (2001).....	57
2.4.12. F.J. VECCHIO, D. LAI, W. SHIM, and J. NG (2001) .....	57
2.4.13. ALAN H. MATTOCK (2001).....	63

2.4.14. K. N. RAHAL (2010) .....	64
2.5. Estudios experimentales, modelización y teorías sobre la transmisión del esfuerzo cortante para hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC). .....	66
2.5.1. B. BARRAGÁN, R. GETTU, L. AGULLÓ, and R. ZERBINO (2006).....	68
2.5.2. D. H. LEE, J. H. HWANG, H. JU, K. S. KIM, and D. A. KUCHMA (2011).....	71
2.5.3. K. S. KIM, D. H. LEE, J. H. HWANG, and D. A. KUCHMA (2011).....	74
2.5.4. J. SUSETYO, P. GAUVREAU, and F.J. VECCHIO (2011).....	77
2.5.5. G. TIBERTI, F. MINELLI, G. A. PLIZZARI, and F. J. VECCHIO (2013) .....	78
2.5.6. J. R. DELUCE, S. C. LEE, and F. J. VECCHIO (2014).....	80
2.5.7. M. ISLAM, S. KHATUN, R. U. ISLAM et. al (2014).....	83
2.5.8. F. SOLTANZADEH, J. A. O. BARROS and R.F.C. SANTOS (2015) [81]. .....	84
<b>Capítulo 3: Programa experimental. ....</b>	<b>87</b>
3.1. Desarrollo del programa experimental. ....	88
3.2. Descripción de las probetas utilizadas en el ensayo <i>push-off</i> .....	89
3.2.1. Materiales. ....	89
3.2.2. Propiedades del hormigón. ....	92
3.2.2.1. Resistencia a compresión según UNE 83507 (2004).....	92
3.2.2.2. Ensayo a flexo-tracción según UNE-EN 14651 (2007).....	94
3.2.3. Dimensiones y armado.....	97
3.2.4. Proceso de fabricación. ....	97
3.3. Instrumentación y proceso de ensayo. ....	98
<b>Capítulo 4: Análisis de la respuesta experimental.....</b>	<b>101</b>
4.1. Obtención y análisis de resultados.....	101
4.1.1. Trabajo de fotogrametría. ....	101
4.1.2. Trabajo con los puntos DEMEC. ....	105
4.1.3. Comparación de resultados entre la fotogrametría y Demec.....	108
4.1.4. Trabajo de los transductores de desplazamiento. ....	113
4.2. Discusión de resultados experimentales.....	115
4.3. Conclusiones experimentales.....	117



<b>Capítulo 5: Modelización.....</b>	<b>119</b>
5.1. Definición del modelo material.....	119
5.1.1 Material DSFM.....	120
5.1.2. Material hor2dpan .....	124
5.1.3. Material MatJ2 .....	134
5.1.4. Material DSFM-Ser. ....	134
5.1.5. Material Acero.....	138
5.2. Métodos para la determinación de los parámetros constitutivos.....	139
5.2.1. Análisis inverso y análisis directo en el hormigón armado y .....	139
5.2.2. Análisis inverso para la obtención del comportamiento .....	140
5.3. Elementos finitos.....	146
5.3.1. Elemento barra.....	146
5.3.2. Cuadrilátero de 4 nodos.....	147
5.3.3. Cuadrilátero de 9 nodos.....	148
5.3.4. Análisis comparativo entre el cuadrilátero de 4 nodos y el de 9 nodos .....	148
 <b>Capítulo 6: Implementación numérica y resultados numéricos.....</b>	 <b>155</b>
6.1. Implementación numérica .....	155
6.1.1. Material .....	155
6.1.2. Análisis Inverso.....	156
6.1.3. Elementos finitos.....	157
6.2. Modelado del ensayo <i>Push-off</i> . Resultados numéricos. ....	162
6.2.1 Modelado como material.....	162
6.2.1.1 Probetas de hormigón armado (HA) con material DSFM .....	163
6.2.1.2 Probetas de hormigón armado y reforzado con fibras de acero (HF) con material DSFM-Ser .....	168
6.2.1.3 Comparación ente HA y HF .....	171
6.2.2 Modelado con Elementos Finitos.....	173
6.3. Conclusiones numéricas.....	179
 <b>Capítulo 7: Conclusiones y futuras líneas de investigación.....</b>	 <b>181</b>
7.1. Síntesis final.....	181
7.2. Conclusiones.....	182

7.3. Futuras líneas de investigación .....	183
--	-----

## **Referencias bibliográficas..... 185**

### **Anejo A: Fichas ensayos**

### **Anejo B: Material DSFM .....B1**

Introducción al modelo .....	B1
Modelo conceptual .....	B3
Condiciones de equilibrio.....	B4
Relaciones de compatibilidad .....	B6
Relaciones constitutivas.....	B9
Modelo de deslizamiento.....	B12
Conclusiones según el propio Vecchio tras la formulación del material .....	B13
Implementación en el modelo de elementos finitos .....	B14
Implementación del modelo de deslizamiento por cortante .....	B19
Implementación de la resistencia a cortante.....	B19
Conclusiones al proceso de implementación según Vecchio.....	B20
Validación del modelo material DSFM según Vecchio.....	B21

### **Anejo C: Modelado con elementos finitos**

### **Anejo D: Calibración del programa con el Panel PB21..... D1**

1. Elemento Finito .....	D1
2. Geometría. ....	D2
3. Condiciones de contorno. ....	D2
4. Condiciones de carga. ....	D3
5. Orden de los nodos. ....	D3
6. Propiedades del material. ....	D4
7. Calibración.....	D4
8. Conclusión. ....	D4

---

<b>Anejo E: Modelado de vigas de Bresler-Scordelis.....</b>	<b>E1</b>
1. Detalles de las vigas. ....	E1
2. Condiciones de contorno y de carga. ....	E2
3. Análisis por elementos finitos. ....	E2
4. Resultados. ....	E5
5. Comparación de resultados. ....	E10
6. Discusión de resultados.....	E11



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Estructuras sometidas a esfuerzo cortante.....	1
Figura 2.1: Gatos hidráulicos y uniones .....	6
Figura 2.2: Fisuración y rotura de los ensayos de cortante con panel.....	6
Figura 2.3: Ensayos tipo push-off: (a) con fisuración previa y (b) sin fisuración previa.....	7
Figura 2.4: Ensayo tipo push-off para ensayos con tracción a través del plano de corte.....	8
Figura 2.5: Ensayo tipo pull-off .....	8
Figura 2.6: Ensayo con vigas.....	9
Figura 2.7: Detalle de las probetas tipo push-off.....	14
Figura 2.8: Construcción de la relación entre la resistencia a cortante $v$ , y el parámetro de armado $pf_y$ en una probeta tipo push-off sin fisuración previa. ....	15
Figura 2.9: Probetas push-off utilizadas en el estudio. (a) Push-off; (b) Pull-off; (c) Push-off modificada .....	17
Figura 2.10: Transmisión de esfuerzo cortante en probetas no fisuradas.....	18
Figura 2.11: Combinación de $\sigma_y, \tau_{xy}$ que provoca la rotura del hormigón .....	19
Figura 2.12: (Izq.) Probeta push-off tipo ménsula; (Der.) Probeta Push-off con tracción perpendicular al plano de corte .....	23
Figura 2.13: Probeta tipo push-off utilizada en este estudio.....	24
Figura 2.15: Estructura general del plano de la fisura observada.....	27
Figura 2.16: Áreas de contacto durante el deslizamiento en la dirección del eje x.....	27
Figura 2.17: (a) Cuerpo de hormigón fisurado, (b)plano Z de intersección, (c) rebanada representativa .....	28
Figura 2.18: (a) Área de contacto entre la matriz y el árido, (b) condiciones tensionales .....	28
Figura 2.19: Probetas tipo push-off con restricción externa .....	29
Figura 2.21: Proceso de solución para la respuesta a cortante puro de un elemento de hormigón armado .....	32
Figura 2.22: Condiciones de equilibrio para deformaciones medias en el hormigón.....	33
Figura 2.23: Condiciones de equilibrio para tensiones medias en el hormigón .....	34
Figura 2.24: Elemento membrana.....	36
Figura 2.26: Diagrama de cuerpo libre de parte del elemento.....	38

Figura 2.27: Tensiones en el hormigón fisurado: (a) tensiones medias en el hormigón, (b) tensiones principales en el hormigón, (c) círculo de Mohr para tensiones medias ....	39
Figura 2.28: Relación tensión-deformación para el armado.....	39
Figura 2.29: Comparación de tensiones locales en la fisura con tensiones medias calculadas..	42
Figura 2.30: Transmisión de las tensiones tangenciales por medio del mecanismo de engranamiento de áridos.....	42
Figura 2.31: Relación entre el cortante transmitido a través de la fisura y la tensión de compresión en la fisura .....	43
Figura 2.32: "The Modified Compression-Field Theory" para elementos membrana.....	45
Figura 2.33: Modelo de celosía para un elemento de hormigón armado .....	47
Figura 2.34: Relaciones tensión-deformación con reblandecimiento para el hormigón.....	49
Figura 2.35: Probetas tipo push-off y zona crítica .....	50
Figura 2.36: Detalle de los paneles para el ensayo .....	53
Figura 2.37: Modelo de elementos finitos para los paneles .....	54
Figura 2.38: Modelo de elementos finitos para los pus-off con fisuración previa .....	55
Figura 2.39: Resultados del análisis de los paneles.....	58
Figura 2.40: Gráficas carga-deformación para paneles representativos: (a) Panel PV23; (b) Panel PB20; (c) Panel PV20; (d) Panel PHS8 .....	59
Figura 2.41: Resultados del análisis de las vigas .....	60
Figura 2.42: Gráficas comparativas de la respuesta carga-deformación de vigas típicas de Bresler y Scordelis.....	61
Figura 2.43: Gráficas comparativas de la respuesta carga-deformación de vigas típicas de Stanik .....	61
Figura 2.44: Resultados del análisis de los muros.....	62
Figura 2.45: Gráficas comparativas de la respuesta carga-deformación de muros de cortante típicos de Lefas et al. ....	62
Figura 2.46: Elemento membrana sujeto a tensiones en el plano y resumen de las ecuaciones del modelo SMCS.....	65
Figura 2.47: Resumen de la correlación del cálculo de seis métodos con las capacidades a cortante obtenidas de forma experimental .....	65
Figura 2.48: Probeta tipo push-off usada.....	68
Figura 2.49: Modo de fallo de una probeta tipo push-off fabricada con hormigón de alta resistencia (70MPa), (izquierda) sin fibras, (derecha) con fibras (40kg/m3) .....	69
Figura 2.50: Gráfica tensión tangencial-deslizamiento para hormigón de 30MPa con 0kg/m3, 20kg/m3 y 40kg/m3 de fibras respectivamente.....	69
Figura 2.51: Malla de elementos finitos usada y distribuciones de tensiones de (a) compresión, (b) tracción y (c) corte (las partes oscuras indican magnitudes altas de tensión) .....	70

Figura 2.52: Concepto del modelo de contribución por tensión directa. (a) comportamiento de las fibras de acero entre las fisuras; (b) tipo de fibras de acero y factores de forma; (c) fisuras inclinadas y fibras de acero entre las fisuras .....	72
Figura 2.53: Procedimiento de análisis para el método iterativo no lineal .....	73
Figura 2.54: Tabla resumen de los paneles utilizados para la verificación del modelo DTFTM .	73
Figura 2.55: Transmisión de las fuerzas a través de las fisuras.....	75
Figura 2.56: Paneles de Susetyo de SFRC.....	76
Figura 2.57: Vigas de SFRC .....	76
Figura 2.58: Características de los materiales que componen los paneles.....	77
Figura 2.59: Geometría y detalles de armado de las probetas para el ensayo de tracción uniaxial.....	78
Figura 2.60: Características de los materiales que componen las probetas.....	79
Figura 2.61: Geometría del elemento finito tipo SOLID65 del software ANSYS 10.0 .....	83
Figura 2.62: Vigas experimentales, modelización con elementos finitos y resultados.....	83
Figura 2.63: (a) localización de la probeta dentro del elemento prismático, (b) geometría y configuración de carga de las probetas para el ensayo de cortante (dimensiones en mm).....	85
Figura 2.64: Diagramas para el modelado (a) del modo de rotura, (b) deformacional .....	85
Figura 2.65: Elemento finito utilizado y mallado del ensayo .....	86
Figura 2.66: Modelado de las condiciones de contorno del ensayo.....	86
Figura 3.1: Dispositivo experimental.....	87
Figura 3.2: Push-off: (izquierda)con fisuración previa, (derecha) sin fisuración previa en el plano de corte.....	88
Figura 3.3: Fibras tipo "Dramix RC-65/35-BN" .....	91
Figura 3.4: Diagrama tensión-deformación del acero B500S que se utiliza para armar.....	92
Figura 3.5: Geometría probetas prismáticas para el ensayo de flexo-tracción. ....	94
Figura 3.6: Imágenes del ensayo a flexo-tracción.....	95
Figura 3.7: Curvas medias carga-abertura de fisura (CMOD) experimentales de las probetas J2-1-A, J2-1-B y su valor medio. ....	95
Figura 3.8: Curvas medias carga-abertura de fisura (CMOD) experimentales de las probetas J2-2-A, J2-2-B y su valor medio. ....	96
Figura 3.9: Curvas medias carga-abertura de fisura (CMOD) experimentales de las probetas J3-1-A, J3-1-B y su valor medio. ....	96
Figura 3.10: Dimensiones en centímetros de la probeta tipo push-off y del plano de cortante.	97
Figura 3.11: Molde (a) sin y (b) con armaduras antes de hormigonar.....	98

Figura 3.12: Probetas (c) tras hormigonar y (d) tras desmoldar.....	98
Figura 3.13: Croquis del dispositivo experimental.....	99
Figura 3.14: Fases de instrumentación y ensayo de las probetas.....	99
Figura 3.15: Vista del pórtico de ensayos tras la rotura. Vistas frontal y dorsal.....	100
Figura 4.1: Representación y toma de fotografía de los puntos donde se sitúan los demec... ..	101
Figura 4.2: Secuencia de imágenes en el momento de la rotura. Probeta Z-HA-3FI8-NF-1. ....	102
Figura 4.3: Obtención de coordenadas con AutoCAD.....	102
Figura 4.4: MEF.....	103
Figura 4.5: Analogía al MEF.....	104
Figura 4.6: Deformación $\varepsilon_y$ por fotogrametría para la probeta Z_HA-3FI8-NF-1.....	104
Figura 4.7: Deformación $\gamma_{xy}$ por fotogrametría para la probeta Z_HA-3FI8-NF-1.....	105
Figura 4.8: Ficha de desplazamientos para los puntos demec de la probeta Z-HA-3FI8-NF-1. ....	106
Figura 4.9: Deformación $\varepsilon_y$ por medida Demec para la probeta Z_HA-3FI8-NF-1. ....	107
Figura 4.10: Deformación $\gamma_{xy}$ por medida Demec para la probeta Z_HA-3FI8-NF-1.....	108
Figura 4.11: Comparación Demec-foto en desplazamientos para la probeta Z_HA-3FI8-NF-1.....	109
Figura 4.12: Errores relativos en % de las 420 medidas de desplazamiento comparadas entre fotogrametría y Demec.....	109
Figura 4.13: Histograma donde se representa el número de medidas que presentan un error relativo dentro de cada intervalo (en %). ....	110
Figura 4.14: Comparación Demec-Foto para deformación $\varepsilon_y$ para la probeta Z_HA-3FI8-NF-1. .....	112
Figura 4.15: Comparación Demec-Foto para deformación $\gamma_{xy}$ para la probeta Z_HA-3FI8-NF-1. .....	112
Figura 4.16: Desplazamientos obtenidos de los transductores para la probeta Z_HA-3FI8-NF-1. Donde H1 y H2 son las medidas del desplazamiento y w es el valor medio. ....	113
Figura 4.17: Comparación Demec-foto-transductor para desplazamientos para la probeta Z_HA-3FI8-NF-1.....	114
Figura 4.18: Deformación $\varepsilon_y$ obtenida a partir de los transductores de desplazamiento para la probeta Z_HA-3FI8-NF-1.....	114
Figura 4.19: Comparación Demec-Foto-Transcutor para deformación $\varepsilon_y$ para la probeta Z_HA- 3FI8-NF-1.....	115
Figura 4.20: Comparativa $\varepsilon_y$ entre hormigón armado y hormigón armado reforzado con fibras. .....	116
Figura 4.21: Comparativa $\gamma_{xy}$ entre hormigón armado y hormigón armado reforzado con fibras. .....	116



Figura 5.1: Elemento de hormigón armado: (a) Armado y condiciones de carga; (b) Círculo de Mohr para la media de las tensiones en el hormigón .....	120
Figura 5.2: Condiciones de equilibrio: (a) Condiciones externas; (b) Paralelas a la dirección de las fisuras; (c) Perpendiculares a dirección de las fisuras; (d) a lo largo de la superficie de la fisura .....	120
Figura 5.3: Condiciones de compatibilidad: (a) Deformaciones debido a la respuesta constitutiva media (extendida); (b) Deformaciones debidas al deslizamiento de sólido rígido a lo largo de la fisura; (c) Deformaciones combinadas .....	121
Figura 5.4: Relaciones constitutivas: (a) Modelo de reblandecimiento por compresión; (b) Modelo de reblandecimiento por tracción; (c) Modelo de tracción de Stiffening; (d) Respuesta del armado de acero .....	123
Figura 5.5: Elemento 2D de hormigón armado fisurado.....	125
Figura 5.6: Ecuación constitutiva del hormigón en compresión.....	126
Figura 5.7: Coeficiente de debilitamiento de la tensión de compresión (SF) .....	127
Figura 5.8: Ecuación constitutiva del hormigón 1D en tracción .....	128
Figura 5.9: Ecuación constitutiva del acero embebido en el hormigón.....	130
Figura 5.10: Círculo de Mohr para la obtención de las direcciones principales .....	133
Figura 5.11: Modelo constitutivo del comportamiento a tracción de los HRFA propuesto por Serna y Fuster .....	135
Figura 5.13 : Representación del ajuste con el programa Matlab donde se representa la curva P-CMOD experimental (azul) y la curva P-CMOD teórica (verde) para la probeta Z-HF-3FI8-NF.....	137
Figura 5.14: Ecuación constitutiva del acero 1D .....	138
Figura 5.15: Planteamientos para la obtención del modelo constitutivo del hormigón armado con fibras .....	140
Figura 5.21: Diagramas elásticos hasta la fisuración: a) elástico lineal, b) elástico no lineal tipo Sargin, c) elástico no lineal parabólico. ....	144
Figura 5.22: Estado deformacional y tensional en el instante de fisuración de la sección con entalla en situada en centro luz.....	145
Figura 5.23: Bucle que esquematiza el funcionamiento del programa durante el Análisis Inverso para hallar el valor de la resistencia a tracción, según el modelo elástico asumido. ....	146
Figura 5.24: Construcción esquemática para la deducción de las funciones de forma para un elemento barra con 2 nodos y 1 grado de libertad por nodo. ....	147
Figura 5.25: Campo de desplazamientos del elemento finito cuadrilátero de 4 nodos .....	149
Figura 5.26: Variación de la $\epsilon_x$ para los puntos que tienen la misma coordenada y pero se encuentran en cuadriláteros distintos.....	151
Figura 5.27: Campo de desplazamientos del elemento finito cuadrilátero de 9 nodos .....	151

Figura 6.1: Norma energética para el control del residuo. ....	157
Figura 6.2: Proceso de cálculo de los métodos de control de respuesta.....	158
Figura 6.3: Gráfica carga aplicada-desplazamiento para: (izquierda) el grado de libertad k impuesto y (derecha) el resto de grados de libertad j.....	160
Figura 6.5: Sistema de referencia en el ensayo y sección de la probeta entre entallas perpendicular a la dirección x.....	163
Figura 6.6: Sección de la probeta entre entallas perpendicular a la dirección y (plano de corte) para 3FI8 y para 2FI8. ....	164
Figura 6.7: Z-HA-3FI8-NF con cuantía de armado x1 comparado con distintas K.....	164
Figura 6.8: Z-HA-3FI8-NF con cuantía de armado x1 comparado con fotogrametría.....	165
Figura 6.9: Z-HA-3FI8-NF con cuantía de armado x2 comparado con distintas K.....	165
Figura 6.10: Z-HA-3FI8-NF con cuantía de armado x2 comparado con fotogrametría.....	165
Figura 6.11: Z-HA-2FI8-NF con cuantía de armado x1 comparado con distintas K.....	166
Figura 6.12: Z-HA-2FI8-NF con cuantía de armado x1 comparado con fotogrametría.....	166
Figura 6.13: Z-HA-2FI8-NF con cuantía de armado x2 comparado con distintas K.....	166
Figura 6.14: Z-HA-2FI8-NF con cuantía de armado x2 comparado con fotogrametría.....	167
Figura 6.15: Z-HA-3FI8-NF con cuantía de armado x1 comparado con modelo con compresión lateral.....	168
Figura 6.16: Z-HA-2FI8-NF con cuantía de armado x1 comparado con modelo con compresión lateral.....	168
Figura 6.17: Z-HF-3FI8-NF comparado con modelo con compresión lateral. ....	169
Figura 6.18: Z-HF-2FI8-NF comparado con modelo con compresión lateral. ....	170
Figura 6.19: Z-HF-0FI8-NF comparado con modelo con compresión lateral. ....	170
Figura 6.20: Comparativa $\varepsilon_y$ y $\gamma_{xy}$ entre hormigón armado y hormigón armado reforzado con fibras en el modelo material.....	171
Figura 6.21: Comparativa $\varepsilon_y$ y $\gamma_{xy}$ entre hormigón armado y hormigón armado reforzado con fibras en el modelo material considerando una compresión lateral.....	171
Figura 6.22: Mallado con el elemento finito tipo cuadrilátero: (izquierda) posición de los puntos Demec, de los puntos de carga y las condiciones de contorno, (derecha) posición de las armaduras cuando se considera el modelo con armadura totalmente discreta. ....	174
Figura 6.23: Condiciones de contorno para el mallado con cuadrilátero de 4 nodos y para el mallado con cuadrilátero de 9 nodos. ....	174
Figura 6.24: Probeta Z-HA-3FI8-NF en rotura: (izquierda) tensiones $\sigma_y$ , (derecha) tensiones tangenciales $\tau_{xy}$ . Uds: MPa.....	175
Figura 6.25: Probeta Z-HA-3FI8-NF en rotura: Trayectorias de tensiones principales en compresión y tracción .....	176

Figura 6.26: Probeta Z-HA-2FI8-NF en rotura: (izquierda) tensiones $\sigma_y$ , (derecha) tensiones tangenciales $\tau_{xy}$ . Uds: MPa.....	176
Figura 6.27: Probeta Z-HA-2FI8-NF en rotura: Trayectorias de tensiones principales en compresión y tracción .....	177
Figura 6.28: Probeta Z-HA-3FI8-NF. Comparación $\varepsilon_y$ con fotogrametría, modelo material y modelo de elementos finitos.....	178
Figura 6.29: Probeta Z-HA-3FI8-NF. Comparación $\gamma_{xy}$ con fotogrametría, modelo material y modelo de elementos finitos.....	178
Figura B.1: Desviación de la dirección principal de las tensiones frente a la dirección principal de las deformaciones.....	B2
Figura B.2: Naturaleza del DSFM en hormigón armado y fisurado.....	B3
Figura B.3: Elemento de hormigón armado: (a) Armado y condiciones de carga; (b) Círculo de Mohr para la media de las tensiones en el hormigón .....	B4
Figura B.4: Condiciones de equilibrio: (a) Condiciones externas; (b) Paralelas a la dirección de las fisuras; (c) Perpendiculares a dirección de las fisuras; (d) a lo largo de la superficie de la fisura .....	B5
Figura B.5: Condiciones de compatibilidad: (a) Deformaciones debido a la respuesta constitutiva media (extendida); (b) Deformaciones debidas al deslizamiento de sólido rígido a lo largo de la fisura; (c) Deformaciones combinadas .....	B7
Figura B.6: Relaciones constitutivas: (a) Modelo de reblandecimiento por compresión; (b) Modelo de reblandecimiento por tracción; (c) Modelo de tracción de Stiffening; (d) Respuesta del armado de acero .....	B10
Figura B.7: Elemento de hormigón armado: (a) Propiedades del elemento y tensiones aplicadas; (b) Deformaciones medias totales en el elemento; (c) Tensiones medias en el hormigón.....	B15
Figura B.8: Definición del módulo secante: (a) Hormigón; (b) Armado.....	B16
Figura B.9: Algoritmo de análisis no lineal .....	B18
Figura B.10: Comparación de respuestas de un panel hipotético: (a) Resistencia a cortante; (b) Inclinación de las tensiones principales en carga última; (c) Inclinación de las deformaciones principales en carga última.....	B20
Figura D.1: Geometría del panel numerada según el orden general de la estructura. ....	D2
Figura D.2: Condiciones de contorno del panel numeradas según el orden general de la estructura .....	D2
Figura D.3: Condiciones de carga del panel numeradas según el orden general de la estructura. ....	D3

Figura D.4: (izquierda) orden general de la estructura, (derecha) orden local del elemento finito. .... D3

Figura E.1: (izq.) sección transversal viga A1, (der.) sección transversal viga A3 ..... E1

Figura E.2: Condiciones de contorno y de carga de la viga biapoyada en un corte por simetría. .... E2

Figura E.3: Mallado de elementos finitos para la viga A1 (arriba) y para la viga A3 (abajo)..... E4

Figura E.4: (de arriba a abajo) tensiones en dirección x, tensiones en dirección y, tensiones tangenciales y patrón de fisuración para la viga A1 con material hor2dpan. .... E7

Figura E.5: (de arriba a abajo) tensiones en dirección x, tensiones en dirección y, tensiones tangenciales y patrón de fisuración para la viga A3 con material hor2dpan. .... E9

Figura E.6: Gráfica fuerza aplicada-desplazamiento para la viga A1 (arriba) y para la viga A3 (abajo)..... E10

## LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1: Síntesis general.....	10
Tabla 2.2: Síntesis numérica.....	11
Tabla 2.3: Síntesis experimental .....	12
Tabla 3.1: Propuesta de ensayos.....	89
Tabla 3.2: Dosificaciones.....	90
Tabla 3.3: Relación entre probetas y la dosificación que las compone .....	90
Tabla 3.4: Características de las fibras tipo "Dramix RC-65/35-BN" .....	91
Tabla 3.5: Resultados del ensayo de resistencia a compresión simple para las probetas fabricadas con la dosificación J1-1.....	92
Tabla 3.6: Resultados del ensayo de resistencia a compresión simple para las probetas fabricadas con la dosificación J1-2.....	93
Tabla 3.7: Resultados del ensayo de resistencia a compresión simple para las probetas fabricadas con la dosificación J2-1.....	93
Tabla 3.8: Resultados del ensayo de resistencia a compresión simple para las probetas fabricadas con la dosificación J2-2.....	93
Tabla 3.9: Resultados del ensayo de resistencia a compresión simple para las probetas fabricadas con la dosificación J3-1.....	94
Tabla 3.10: Estimación de las resistencias residuales.....	97
Tabla 4.1: Estadística descriptiva.....	110
Tabla 4.2: Estadísticos por tanda.....	111
Tabla 4.3: Promedio total.....	111
Tabla 4.4: tensión tangencial última.....	117
Tabla 5.1. Deformaciones consideradas para cada hormigón 1D.....	132
Tabla 5.2: Parámetros $\alpha$ , $\beta$ , $\varepsilon_{ct0}$ y $f_{ct}$ obtenidos para las distintas probetas .....	137
Tabla 5.3: Barra de 2 nodos expresado en el sistema de coordenadas isoparamétrico. ....	147
Tabla 5.4: Cuadrilátero de 4 nodos expresado en el sistema de coordenadas isoparamétrico. .....	148

---

Tabla 5.5: Cuadrilátero de 9 nodos expresado en el sistema de coordenadas isoparamétrico. .....	148
Tabla 6.1: Tabla identificador-dosificación-resistencia a compresión .....	162
Tabla 6.2: Tabla identificador-modelo material.....	162
Tabla 6.3: Parámetros $\alpha$ , $\beta$ , $\varepsilon_{ct0}$ y $f_{ct}$ obtenidos para las distintas probetas .....	169
Tabla 6.4: Tensión tangencial crítica (de fisuración), tensión tangencial última y resistencia a compresión simple para modelo material para la cuantía de armado $x_1$ y $K=1$ . .....	172
Tabla 6.5: Tensión tangencial crítica, tensión tangencial última y resistencia a compresión simple para modelo material con compresión lateral para la cuantía de armado $x_1$ y $K=1$ . .....	172
Tabla 6.6: Comparativa de los ángulos de inclinación de las bielas para ensayo experimental, modelo material y modelo material con compresión lateral, en grados sexagesimales .....	173
Tabla D.1: Elemento finito expresado en el sistema de coordenadas isoparamétrico.....	D1
Tabla E.1: Detalle de la sección transversal de las vigas de Bresler-Scordelis A1 y A3.....	E1
Tabla E.2: Propiedades del acero que conforma el armado de las vigas de Bresler-Scordelis... ..	E2
Tabla E.3: Propiedades del hormigón que conforma las vigas de Bresler-Scordelis. ....	E2
Tabla E.4: Elemento finito expresado en el sistema de coordenadas isoparamétrico .....	E3
Tabla E.5: Barra de 2 nodos expresado en el sistema de coordenadas isoparamétrico.....	E3

# Capítulo 1: Introducción y objetivos

## 1.1. Marco general

El problema relativo a la transferencia del esfuerzo cortante en elementos de hormigón se ha venido abordando desde diferentes puntos de vista durante las últimas décadas [1,2]. A pesar de todo el tiempo transcurrido, se vuelven a revisar, una y otra vez, los mecanismos resistentes en los que se fundamenta este complejo fenómeno.

Normalmente el esfuerzo cortante siempre va acompañado de otros esfuerzos como pueden ser los esfuerzos normales: axil y/o flector. En casi todos los ámbitos estructurales que aparecen en la realidad resulta difícil encontrar el cortante de un modo aislado (ver figura 1.1). Por tanto, resulta necesario para el estudio del esfuerzo cortante de un modo exclusivo y directo el uso de tipologías de ensayos propios y la realización de experiencias que, probablemente, sólo se den en condiciones de laboratorio o en condiciones forzadas.



*Figura 1.1: Estructuras sometidas a esfuerzo cortante.*

El estudio de la transmisión del esfuerzo cortante ha sido abordado por numerosos investigadores a partir del denominado ensayo *push-off* [5,6,7,8,9] principalmente en probetas en las que se induce la posición de la fisura. Cuando no se fuerza la posición de la fisura en este ensayo se originan fisuras diagonales de cortante que llevan una cierta orientación con respecto al plano de corte [6]. El fallo final del elemento viene gobernado habitualmente por la rotura de las bielas de hormigón en compresión que se generan entre las fisuras que se producen. La compresión que se produce entre las bielas de compresión y la tracción que transmiten las armaduras, tanto las que cruzan el plano de corte como las paralelas a éste, originan un mecanismo resistente de celosía. Se suele asumir que la distribución de tensiones normales y tangenciales en la zona del plano de corte en condiciones de rotura es constante, lo cual permite obtener resultados en base a valores promedio a lo largo de todo el plano [9]. En este tipo de ensayo se genera la duda de saber si realmente el hecho de asumir una distribución de tensiones tangenciales medias en el plano de corte es razonable no sólo para situación de agotamiento, sino también para cualquier nivel de tensiones aplicado. A su vez, el hecho de que se pueda asumir este comportamiento medio en tensiones es insuficiente para poder extrapolar información relevante que sirva de base para la validación de modelos teóricos de comportamiento. El estudio de relacionar las tensiones tangenciales con las distorsiones angulares no se ha llevado a cabo en este tipo de ensayo. Sin embargo, otros ensayos de mucha mayor complejidad técnica, como es el caso de los paneles de hormigón armado, han sido llevados a cabo con el fin de conseguir este objetivo [23].

## 1.2. Objetivos

Los principales objetivos que se plantean en esta investigación son:

- Obtener el campo de desplazamientos y de deformaciones en probetas tipo *push-off* de una manera experimental.
- Validar la técnica de la fotogrametría como herramienta alternativa y válida para tener una medida suficientemente continua de estos campos de desplazamientos y deformaciones.
- Verificar numéricamente dichos resultados mediante la modelización del ensayo *push-off* por medio de un modelo material.
- Estudiar diferencias de comportamiento a cortante en probetas *push-off* de hormigón armado y hormigón armado y reforzado con fibras de acero.
- Validar numéricamente este último objetivo mediante la propuesta de un modelo constitutivo para la respuesta tensión-deformación del hormigón armado y reforzado con fibras de acero.

## 1.3. Importancia de la investigación

En este trabajo se intenta poner de manifiesto la complejidad que envuelve el estudio del esfuerzo cortante puro. Existen multitud de factores que influyen en la respuesta de una pieza de hormigón armado (RC) sometido a esfuerzo cortante como pueden ser: el diámetro de las barras de armado, el efecto pasador de las armaduras, el engranamiento de áridos, el



deslizamiento relativo de los planos de fisura cuando el hormigón ha fisurado, la consideración de la tensión de stiffening,...

Si se añaden fibras de acero a la matriz para conformar el hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC) para evaluar la mejora del comportamiento frente a cortante, además de los factores concernientes al propio hormigón armado enumerados anteriormente, se añaden los referentes a las fibras como pueden ser: resistencia a la rotura de las fibras, adherencia de las fibras a la matriz, cantidad de fibras que se utiliza, orientación de las fibras dentro de la masa, el diámetro y longitud de las fibras,...

Todos estos factores son determinantes a la hora de explicar el comportamiento a cortante, a nivel experimental, de las piezas de hormigón. En función del tipo de experiencia que se realice predominan unas características sobre otras. Algunos de los ensayos más utilizados a lo largo de la historia del estudio del cortante son los paneles, las vigas, las probetas tipo push-off (con y sin fisuración previa), ensayos pull-off...

Asimismo, estos factores son los que marcan las diferencias entre los distintas ecuaciones y modelos que van surgiendo. Según se consideren unos factores, se desprecien otros o en qué proporción se tengan en cuenta cada uno de ellos, se obtienen unas diferencias muy importantes en las respuestas generadas por dichos modelos. Es en este punto donde surgen las mayores dificultades y, a su vez, los mayores retos a la hora de modelar este tipo respuesta.

Las investigaciones relacionadas con el esfuerzo cortante presentan dos partes diferenciadas: la parte experimental y la parte teórica. Además de la necesidad de dar solución a cada una de ellas por separado, también es necesario interrelacionarlas para generar modelos adaptados a la realidad. Por ello, a lo largo de la literatura se distinguen dos vías en la investigación del cortante. Por una parte, se realizan gran cantidad de ensayos experimentales con los que se pretende generar un registro de información práctica. Por la otra, van apareciendo multitud de ecuaciones simples y modelos más complejos que intentan dar respuesta teórica y modelar el comportamiento a cortante que se manifiesta en la práctica.

El trabajo que aquí se presenta intenta ser una contribución más al campo de la investigación del cortante tanto desde el punto de vista práctico como teórico en piezas de RC y en piezas de SFRC. Se realiza una campaña experimental de ensayos de cortante tipo push-off sin fisuración previa con la que se obtiene información mediante diferentes técnicas de medida para probetas de RC y de SFRC. También se realiza un modelado como punto material y mediante elementos finitos de las piezas utilizadas en la campaña experimental. Para el RC se utiliza un modelo constitutivo de la literatura mientras que para el SFRC se realiza un propuesta de modelo propia.

## **1.4. Contenido del documento**

Este trabajo final de máster se divide en los siguientes capítulos:

- CAPÍTULO 1:** Se introduce el tema de estudio a través del marco general donde se sitúa la investigación, la definición de los objetivos y se destaca la importancia de la investigación dentro del su campo.

- CAPÍTULO 2: Se realiza el estado del arte. Se lleva a cabo una breve descripción de las tipologías de ensayos más utilizadas para el estudio experimental del esfuerzo cortante. También se lleva a cabo un repaso de los estudios experimentales, modelización y teorías sobre la transmisión del esfuerzo cortante tanto para hormigón armado (RC) como para hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC).
- CAPÍTULO 3: Se describe el programa experimental que se lleva a cabo: el desarrollo del programa, se describen las probetas que se utilizan desde el punto de vista de los materiales que las componen, sus propiedades mecánicas, las dimensiones, el proceso de fabricación, la instrumentación y el proceso de ensayo.
- CAPÍTULO 4: Se lleva a cabo el análisis de la respuesta experimental. Se explican y se muestran los resultados obtenidos con las distintas tipologías de medidas, se realiza una comparación de resultados entre ellas, se lleva a cabo una discusión de resultados y se obtienen unas conclusiones experimentales.
- CAPÍTULO 5: Se explica la modelización que se pretende llevar a cabo de un modo teórico. Se describen las relaciones constitutivas de los materiales que se usan para el modelado de las probetas desde el punto de vista material y para los elementos finitos, se realiza la distinción entre el tipo de análisis directo y el inverso y se explican los elementos finitos utilizados.
- CAPÍTULO 6: Se lleva a cabo la implementación numérica y se muestran y se analizan los resultados que se obtienen. Se realiza una descripción del programa que se utiliza para la modelización, como se lleva a cabo el modelado del RC y del SFRC como punto material y los resultados que se obtienen y como se lleva a cabo el modelado del RC con el método de los elementos finitos y los resultados que se obtienen. Al final se obtienen unas conclusiones del modelado numérico.
- CAPÍTULO 7: Se ponen de manifiesto las conclusiones que se han ido obteniendo en las siguientes fases (experimental y de modelización) del trabajo y se marcan las posibles vías de continuación de la investigación.

## Capítulo 2: Estado del arte.

### 2.1. Introducción.

En este capítulo se lleva a cabo una pequeña descripción de los distintos tipos de ensayos que se utilizan para el estudio del esfuerzo cortante de una forma experimental. En ellos se intenta generar unas condiciones de cortante puro a través de la forma de las probetas. Concretamente se distinguen los paneles, los ensayos tipo *push-off*, los ensayos tipo *pull-off* y las vigas.

Posteriormente se realiza una síntesis general de los autores más destacados tanto para hormigón armado (RC) como para hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC). En ella se muestran la tipología de ensayos experimentales que se han hecho y los distintos modelos numéricos y ecuaciones que se han propuesto hasta ahora.

Después se lleva a cabo una descripción más detallada de cada uno de los autores destacados en la síntesis. Se describen, por una parte, las aportaciones llevadas a cabo para el RC y, por otra, las llevadas a cabo para el SFRC.

### 2.2. Tipologías de ensayos para el estudio del esfuerzo cortante.

La mayoría de ensayos que se llevan a cabo para el estudio del cortante en hormigón durante los últimos cuarenta años son:

- paneles
- ensayos tipo *push-off*
- ensayo tipo *pull-off*
- vigas

En función de la geometría y del modo de aplicación de las cargas se tiene una posición del plano de corte y, además, dependiendo del tipo y cantidad de armado, se tiene un tipo de rotura u otro.

#### 2.2.1. Paneles.

Se usan para el estudio del "cortante puro". La carga se transmite a través de gatos hidráulicos conectados a las uniones con los paneles [3,4]. En la figura 2.1 se puede observar un esquema del montaje y en la figura 2.2 algunos ejemplos de fisuración y rotura de este tipo de ensayos [3].

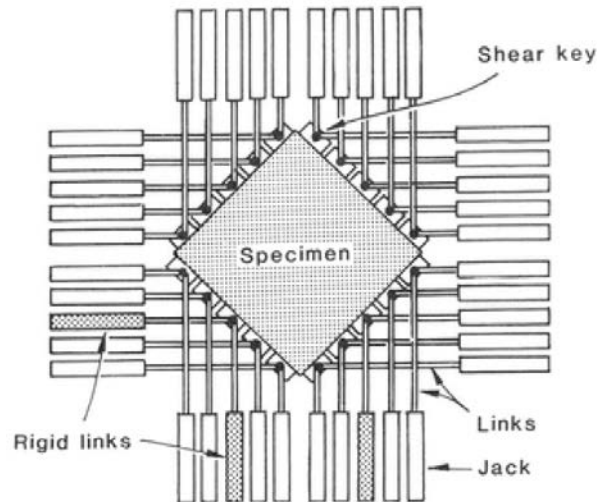


Figura 2.1: Gatos hidráulicos y uniones [3].

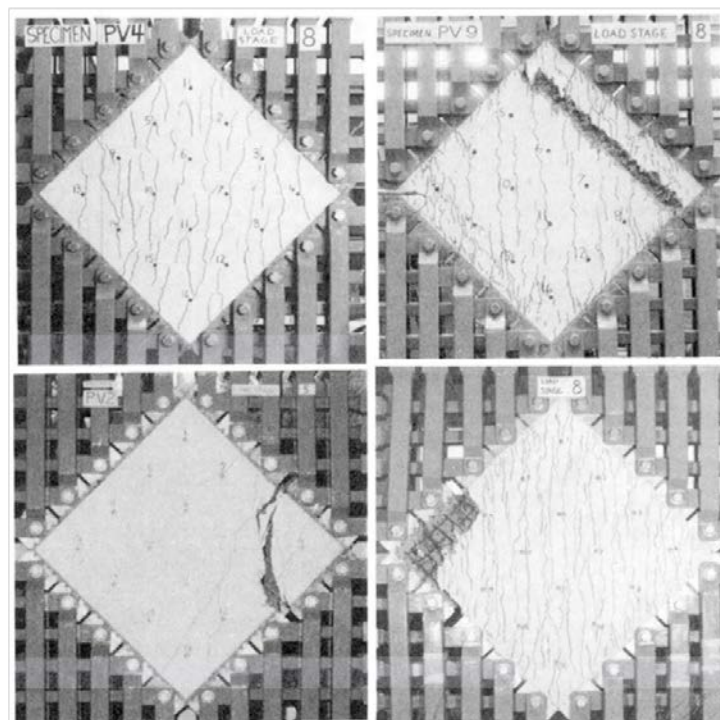


Figura 2.2: Fisuración y rotura de los ensayos de cortante con panel [3].

### 2.2.2. Ensayos tipo *push-off*.

El estudio de la transmisión del esfuerzo cortante ha sido abordado por numerosos investigadores a partir del denominado ensayo *push-off* [5,6,7,8,9,10] principalmente en probetas en las que se marca la posición de la fisura.

Existen dos clases de ensayos tipo *push-off* (ver figura 2.3):

- Con fisuración previa a lo largo del plano de cortante.
- Sin fisuración previa a lo largo del plano de cortante.

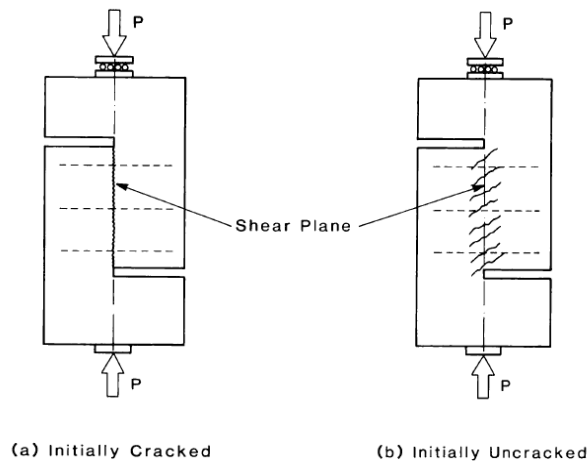


Figura 2.3: Ensayos tipo push-off: (a) con fisuración previa y (b) sin fisuración previa [6].

El comportamiento en el primer caso viene gobernado, en gran parte, por las características corte-deslizamiento del plano de cortante fisurado. La resistencia a cortante en este caso se ve afectada por el engranamiento de áridos, el efecto pasador de las armaduras perpendiculares al plano de corte y por las constricciones normales al plano de corte. El fallo final se produce a lo largo de la fisura previamente realizada (ver figura 2.3 (a)) [6].

En contraste, el fallo por cortante en probetas sin fisuración previa ocurre tras la formación de numerosas fisuras en una dirección inclinada desde el plano de corte (ver figura 2.3 (b)). El fallo final, normalmente, se produce debido al aplastamiento del hormigón en las bielas de compresión formadas aproximadamente paralelas a la dirección de las fisuras. La compresión que se produce entre las bielas de compresión y la tracción que transmiten las armaduras, tanto las que cruzan el plano de corte como las paralelas a éste, originan un mecanismo resistente de celosía. La principal dificultad en la predicción del comportamiento frente a cortante del hormigón sin fisuración previa viene provocada por la incertidumbre de la resistencia a compresión de las bielas. Se comprobó que la resistencia de las bielas de compresión de hormigón formadas tras la fisuración puede ser inferior que la resistencia a compresión simple estándar. Este fenómeno es conocido como el reblandecimiento del hormigón. Este reblandecimiento de la biela de hormigón está relacionado con la deformación por tracción en la dirección perpendicular a las bielas [6].

También destacar que existe otra tipología de ensayo *push-off* en la cual varía un poco la geometría y la posición de las entallas en las piezas (ver figura 2.4). Este tipo de piezas se usan para ensayos en los que, además, se quiera provocar una tracción a través del plano de corte. Del mismo modo que con el *push-off* anterior, también existe la posibilidad de las dos variantes: con fisuración previa y sin fisuración previa a lo largo del plano de corte[10].

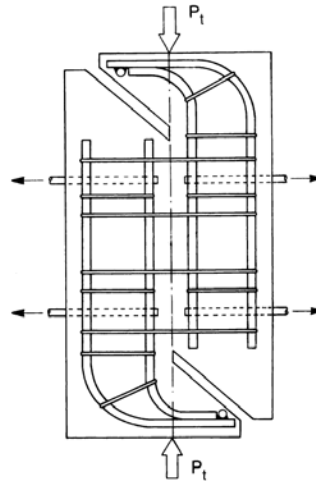


Figura 2.4: Ensayo tipo push-off para ensayos con tracción a través del plano de corte [10].

### 2.2.3. Ensayos tipo pull-off.

En los ensayos tipo *pull-off* se aplica una fuerza de tracción en la dirección transversal de la probeta para provocar una tensión tangencial en el plano de corte y una tensión de tracción en la dirección transversal (ver figura 2.5). Es difícil de estimar la distribución local de la tensión de tracción y, por ello, el cortante calculado suele ser algo mayor que el realmente aplicado porque la tensión de tracción media que se usa es un valor subestimado [5, 6]. Al igual que con el ensayo push-off, también existe la posibilidad de las dos variantes: con fisuración previa y sin fisuración previa a lo largo del plano de corte.

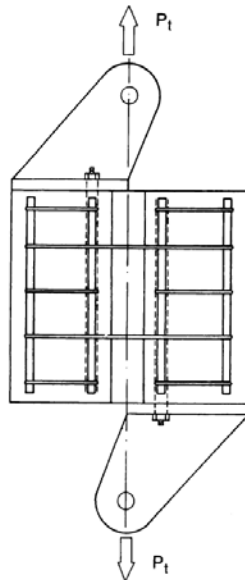


Figura 2.5: Ensayo tipo pull-off [6].

### 2.2.4. Vigas.

Las vigas también han sido utilizadas para el estudio del esfuerzo a cortante [11, 12, 13, 14]. se han realizado experiencias con y sin armadura de cortante (ver figura 2.6).

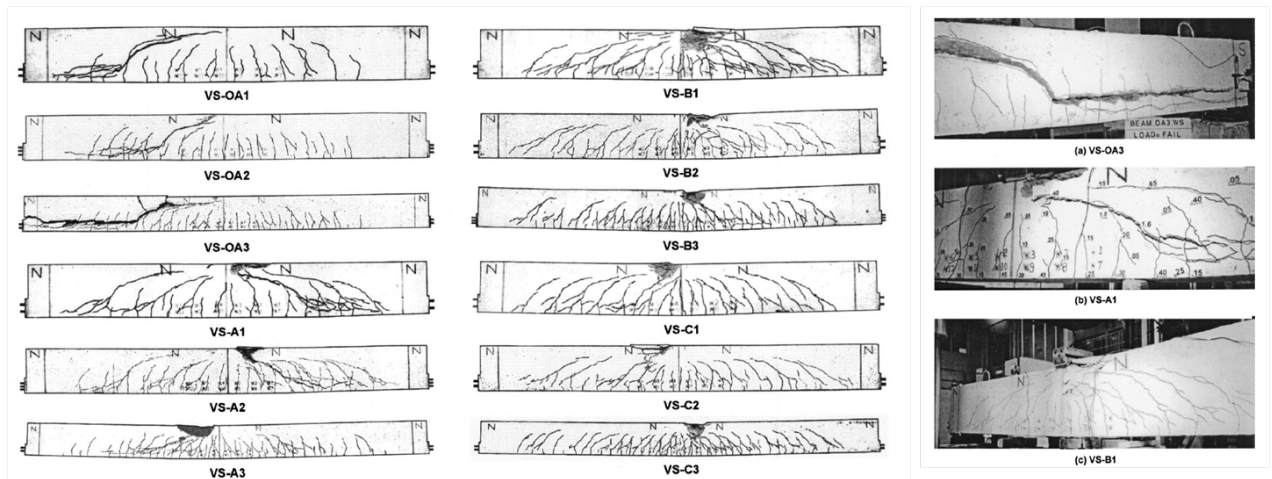


Figura 2.6: Ensayo con vigas [14].

### 2.3. Síntesis general

En las siguientes tablas se muestran una síntesis de los trabajos realizados por los distintos autores que se describen en este capítulo.

La tabla 2.1 es una síntesis general donde se encuentran algunos de los autores más destacados tanto en los trabajos realizados con RC como con SFRC. Estos autores aparecen ordenados por orden cronológico ascendente. En las columnas se muestran si los ensayos experimentales que se muestran en los trabajos son propios o son tomados de la literatura. El objetivo de la realización de ensayos propios puede ser la generación de una base de datos para la posterior calibración de modelos numéricos o para la obtención de alguna ecuación relativa al cortante y su posterior ajuste. Por otra parte, se usan ensayos de la literatura en gran cantidad para la calibración de modelos que pueden ser a nivel material o con elementos finitos.

La tabla 2.2 se centra en los modelos numéricos. En ella se expresa la teoría en la que se basa el modelo generado por cada uno de los autores. Como ya se menciona en el apartado 1.3 de este trabajo, existen multitud de factores que pueden determinar la resistencia a cortante en RC y en SFRC: diámetro de las barras de armado, la consideración de efectos como el efecto pasador de las barras o el engranamiento de áridos, la adherencia de las barras, la cantidad de fibras de acero, su longitud, su diámetro, su adherencia, su resistencia a la rotura, su orientación dentro de la masa,... En función de qué factores se consideren y cómo se hagan van surgiendo los distintos modelos numéricos que se proponen.

La tabla 2.3 muestra la tipología de ensayos experimentales que se usa para llevar a cabo los distintos trabajos. En función de la forma de la pieza y de las características del hormigón que se ensaya, se obtienen unos resultados u otros. Con ellos se pueden realizar comparaciones y obtener conclusiones. La forma de la probeta puede inducir efectos físicos que son necesarios considerar a la hora de generar un cortante lo más puro posible. Las características del hormigón ya mencionadas son determinantes para la obtención de resultados y para la posterior obtención de ecuaciones que intenten explicar el comportamiento frente a cortante observado.

Tabla 2.1: Síntesis general

Autor (año)	Tipo de Hormigón	Ensayo Experim.	Modelo Num.
Hofbeck et. al. (1969)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> )	Propio	Material
Mattock et. al. (1972)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> )	Propio y Literat.	Material
Mattock et. al. (1975)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> )	Propio	Material
Mattock et. al. (1976)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> )	Propio	Material
Walraven (1981)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> y HR <sup>5</sup> )	Propio	Material
Vecchio et. al. (1981)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> )	Propio	Material
Vecchio et. al. (1986)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> )	Propio	Material
Hsu et. al. (1987)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> )	Literatura	Material
Vecchio et. al. (1991)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> )	Propio	Elem. Finitos
Vecchio (2000)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> y HR <sup>5</sup> )	-	Material
Vecchio (2001)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> y HR <sup>5</sup> )	-	Elem. Finitos
Vecchio et. al. (2001)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> y HR <sup>5</sup> )	Literatura	Material
Mattock (2001)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> y HR <sup>5</sup> )	Literatura	Material
Barragán et. al. (2006)	SFRC <sup>2</sup> (NR <sup>4</sup> y HR <sup>5</sup> )	Propio	Elem. Finitos
Rahal (2010)	RC <sup>1</sup> (NR <sup>4</sup> y HR <sup>5</sup> )	Literatura	Material
Lee et. al. (2011)	SFRC <sup>2</sup> (NR <sup>4</sup> y HR <sup>5</sup> )	Literatura	Elem. Finitos
Kim et. al. (2011)	SFRC <sup>2</sup> (NR <sup>4</sup> y HR <sup>5</sup> )	Literatura	Material
Susetyo et. al. (2011)	SFRC <sup>2</sup> (NR <sup>4</sup> y HR <sup>5</sup> )	Propio	-
Tiberti et. al. (2013)	SFRC <sup>2</sup> (NR <sup>4</sup> y HR <sup>5</sup> )	Propio	-
Deluce et. al. (2014)	SFRC <sup>2</sup> (NR <sup>4</sup> y HR <sup>5</sup> )	Literatura	Material
Islam et. al. (2014)	SFRC <sup>2</sup>	Propio	Elem. Finitos
Soltanzadeh et. al. (2015)	HPFRC <sup>3</sup> (NR <sup>4</sup> y HR <sup>5</sup> )	Propio	Elem. Finitos

1. RC: Hormigón armado
2. SFRC: Hormigón armado y reforzado con fibras de acero
3. HPFRC: Hormigón autocompactable, armado y reforzado con fibras (de acero)
4. NR: Hormigón de resistencia a compresión normal (< 50MPa)
5. HR: Hormigón de alta resistencia a compresión (> 50MPa)



Tabla 2.2: Síntesis numérica

Autor (año)	Modelo num.	Basado en
Hofbeck et. al. (1969)	Material	Shear-Friction Theory
Mattock et. al. (1972)	Material	Shear-Friction Theory
Mattock et. al. (1975)	Material	Shear-Friction Theory
Mattock et. al. (1976)	Material	Shear-Friction Theory
		PCI-Design Handbook
Walraven (1981)	Material	Engranamiento de áridos
Vecchio et. al. (1981)	Material	Valores medios con Círculo Mohr
Vecchio et. al. (1986)	Material	MCFT <sup>3</sup> (a partir del CFT <sup>2</sup> )
Hsu et. al. (1987)	Material	Modelo celosía con reblandecimiento (INF <sup>1</sup> )
Vecchio et. al. (1991)	Elem. Finitos	MCFT <sup>3</sup>
Vecchio (2000)	Material	DSFM <sup>4</sup> (a partir del MCFT <sup>2</sup> )
Vecchio (2001)	Elem. Finitos	DSFM <sup>4</sup>
Vecchio et. al. (2001)	Material	MCFT <sup>3</sup>
		DSFM <sup>4</sup>
Mattock (2001)	Material	Shear-Friction Theory
Barragán et. al. (2006)	Elem. Finitos	Elástico
Rahal (2010)	Material	SMCS <sup>5</sup>
Lee et. al. (2011)	Elem. Finitos	DTFTM <sup>6</sup>
Kim et. al. (2011)	Material	MCFT <sup>3</sup>
Susetyo et. al. (2011)	-	-
Tiberti et. al. (2013)	-	-
Deluce et. al. (2014)	Material	CEB-FIP 1978 [71]
Islam et. al. (2014)	Elem. Finitos	ANSYS 10.0.
Soltanzadeh et. al. (2015)	Elem. Finitos	Fisuración Difusa Multidireccional

1. INF: Inicialmente NO fisurado

2. CFT: The Compression-Field Theory [24, 25]

3. MCFT: The Modified Compression-Field Theory [23]

4. DSFM: Disturbed Stress-Field Model [27, 28, 29]

5. SMCS: Simplified Model for Combined Stress Resultants [30]

6. DTFTM: Direct Tension Force Transfer Model [47]

Tabla 2.3: Síntesis experimental

Autor (año)	Ensayo experim.	Tipo	Nº probetas
Hofbeck et. al. (1969)	Propio	Push-off INF <sup>1</sup>	15
		Push-off IF <sup>2</sup>	23
Mattock et. al. (1972)	Propio y literat.	Push-off INF <sup>1</sup>	23
		Push-off IF <sup>2</sup>	25
		Pull-off INF <sup>1</sup>	6
		Pull-off IF <sup>2</sup>	6
		Modified Push-off INF <sup>1</sup>	6
		Modified Push-off IF <sup>2</sup>	10
Mattock et. al. (1975)	Propio	Push-off IF <sup>2</sup>	12
		Push-off T <sup>3</sup> INF <sup>1</sup>	6
		Push-off T <sup>3</sup> IF <sup>2</sup>	9
Mattock et. al. (1976)	Propio	Push-off INF <sup>1</sup>	28
		Push-off IF <sup>2</sup>	36
Walraven (1981)	Propio	Push-off C <sup>4</sup> IF <sup>2</sup>	32
Vecchio et. al. (1981)	Propio	Panel	17
Vecchio et. al. (1986)	Propio	Panel	30
Hsu et. al. (1987)	Literatura	Push-off INF <sup>1</sup>	20
		Push-off T <sup>3</sup> INF <sup>1</sup>	6
		Pull-off INF <sup>1</sup>	6
Vecchio et. al. (1991)	Propio	Panel	6
Vecchio (2000)	-	-	-
Vecchio (2001)	-	-	-
Vecchio et. al. (2001)	Literatura	Panel	40
		Viga	54
		Muro	13
Mattock (2001)	Literatura	Push-off IF <sup>2</sup>	185
Barragán et. al. (2006)	Propio	Push-off INF <sup>1</sup>	6
Rahal (2010)	Literatura	Push-off INF <sup>1</sup>	114
		Push-off IF <sup>2</sup>	
		Viga	15
Lee et. al. (2011)	Literatura	Panel	8
Kim et. al. (2011)	Literatura	Panel	8
		Viga	80
Susetyo et. al. (2011)	Propio	Panel	10
Tiberti et. al. (2013)	Propio	Tracción directa	168
Deluce et. al. (2014)	Literatura	Tracción directa	70
		Panel	10
Islam et. al. (2014)	Propio	Viga	1
		Push-off IF <sup>2</sup>	1
		Doble Push-off IF <sup>2</sup>	1
Soltanzadeh et. al. (2015)	Propio	Doble Push-off IF <sup>2</sup>	12

1. INF: Inicialmente NO fisurado
2. IF: Inicialmente fisurado
3. T: Con tracción a través del plano de corte
4. C: Confinado

## 2.4. Estudios experimentales, modelización y teorías sobre la transmisión del esfuerzo cortante para hormigón armado.

En este apartado se realiza una cronología y una breve descripción sobre los trabajos acerca del estudio de la transmisión del esfuerzo cortante en hormigón armado que han llevado a cabo los distintos autores a lo largo de los últimos años.

### 2.4.1. J.A. HOFBECK, I.O. IBRAHIM y ALAN H. MATTOCK (1969) [15].

La parte experimental de este estudio se compone de 38 probetas tipo *push-off* de hormigón armado, algunas de ellas con fisuración previa y otras no.

Los objetivos de este estudio son:

1. Determinar la influencia en la transferencia del esfuerzo cortante en el plano de corte de la fisuración previa en dicho plano.
2. Determinar la influencia de la resistencia, tamaño y disposición del armado en la transferencia del esfuerzo cortante a través del plano de corte.
3. Determinar la influencia de la resistencia del hormigón en la transferencia del esfuerzo cortante en el plano de corte.
4. Examinar la posible contribución en la transferencia del esfuerzo cortante en el plano de corte del "efecto pasador" de las barras de armado que cruzan dicho plano.
5. Examinar la aplicabilidad de la teoría del "*shear friction*" [16,17] para el cálculo de la resistencia a corte a lo largo del plano de corte cuando existe una fisuración previa en dicho plano.
6. Tratar de relacionar la resistencia a corte en el plano de corte medida en los ensayos de *push-off* con las resistencias a compresión y a tracción del hormigón y del acero.

En el ensayo se provoca en las piezas un esfuerzo de corte sin momento en el plano de corte. Si se coloca de manera correcta el armado longitudinal, el fallo final en este tipo de ensayos viene producido a lo largo del plano de corte. El armado a través del plano de corte está compuesto por estribos cerrado anclados al armado longitudinal (ver figura 2.7).

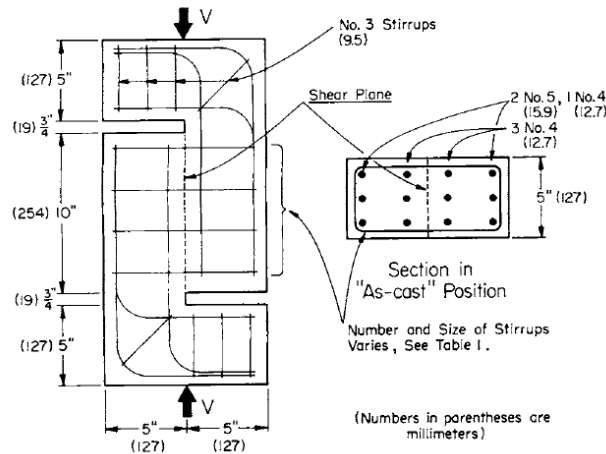


Fig. 1—Details of push-off specimen

Figura 2.7: Detalle de las probetas tipo push-off [15].

Descripción del modelo "shear-friction" [16,17]:

La teoría de la fricción por cortante ("shear-friction") es discutida con detalle en Birkeland and Birkeland [16] y por Mast [17]. Se asume la presencia de una fisura a lo largo del plano de corte, y se asume que un armado de área  $A_s$  y límite de elasticidad  $f_y$  cruza la fisura en ángulo recto. Las caras de la fisura son rugosas e irregulares, por lo que cuando se produce el deslizamiento a lo largo de la fisura, las piezas de hormigón en ambas caras de la fisura se separan levemente. Esta separación puede poner el acero en tracción que, al mismo tiempo, puede generar compresión en el hormigón a través de la fisura. Esta tensión de compresión puede producir resistencia al deslizamiento a lo largo de la fisura debido a la fricción entre las superficies rugosas e irregulares de ambas caras de la fisura. Se asume que la separación entre caras es la suficiente para provocar que la tensión en el armado sea la del límite elástico, por lo que si  $\tan\phi$  es el coeficiente de fricción entre las caras de la fisura, la resistencia a cortante a lo largo de la fisura vendrá dada por:

$$V_u = A_s f_y \tan\phi \quad (2.1)$$

que, si se divide por el área del plano de corte, la expresión queda:

$$v_u = p f_y \tan\phi \quad (2.2)$$

Para el estudio del caso sin fisuración previa, se considera una probeta tipo *push-off* de ancho  $w$ , espesor  $b$ , y un plano de cortante de longitud  $d$  (ver figura 2.8). Las tensiones actuando en un pequeño elemento de hormigón sobre el plano de corte vienen expresadas en (b) en la figura 2.8. Se trata, pues, de las tensiones tangenciales  $\nu$  en todas las caras, tensiones normales  $\sigma_x$  provocadas por la restricción de los estribos de acero para el armado y tensiones normales  $\sigma_y$  debidas a las fuerzas aplicadas  $V$ . Como no se conoce la distribución exacta de las tensiones, se usa tensiones medias:

$$\nu = V/bd \quad (2.3)$$

$$\sigma_x = p f_y \tag{2.4}$$

$$\sigma_y = V/bw \tag{2.5}$$

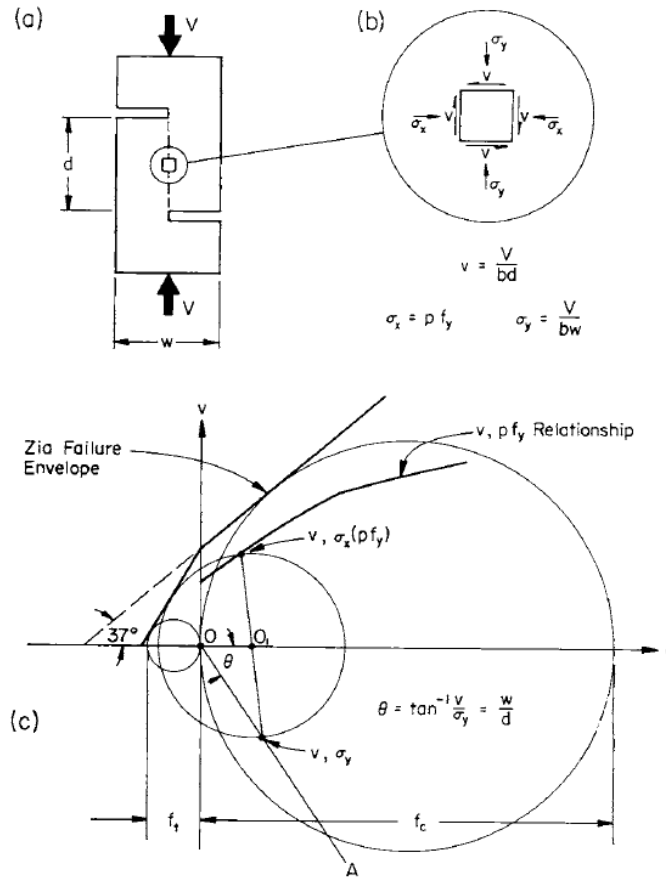


Figura 2.8: Construcción de la relación entre la resistencia a cortante  $v$ , y el parámetro de armado  $p f_y$  en una probeta tipo push-off sin fisuración previa [15].

El problema consiste en determinar las combinaciones de estas tensiones que provoquen la rotura del hormigón en el plano de corte. Para hacer esto, se usa la curva propuesta por Zia [18]. Esta curva de rotura se muestra en (c) en la figura 2.8 y consiste en dos partes; (1) una línea inclinada 37 grados a partir del eje de la tensión normal y tangente al círculo de Mohr que representa la rotura en compresión uniaxial; (2) una línea trazada desde el punto de intersección de la primera línea con el eje de tensión tangencial, y tangente al círculo de Mohr representando la rotura en tracción uniaxial.

Si para un determinado tipo de *push-off*, el cociente  $v/\sigma_y$  es constante, los puntos de rotura en el círculo de Mohr correspondientes a  $v$  y  $\sigma_y$ , estarán situados todos en la línea  $OA$  inclinada un ángulo  $\theta$  a partir del eje de tensión normal, donde  $\theta$  es  $\tan^{-1}(v/\sigma_y)$ . El término  $(v/\sigma_y)$  es fijo para las proporciones de la probeta y es igual a  $w/d$ . Se dibujan una serie de círculos, cada uno tangente a la curva de rotura. Donde la recta  $OA$  corta con el círculo, se obtiene el punto  $(v, \sigma_y)$  para las condiciones tensionales de rotura representadas por el círculo. Se traza una recta que pasa por el punto  $(v, \sigma_y)$  y el centro del círculo. Donde esta recta corta al círculo

diametralmente opuesto del punto  $(v, \sigma_y)$ , fija el punto  $(v, \sigma_x)$ , este es  $(v_u, pf_y)$ . Repitiendo este mismo proceso para varios círculos, se obtienen una sucesión de puntos  $(v_u, pf_y)$ . La línea que une estos puntos  $(v_u, pf_y)$  constituye la relación  $v_u$ - $pf_y$  obtenida en el ensayo *push-off*.

En este estudio se concluye, entre otras:

- La presencia de la prefisura reduce la resistencia última a cortante en el plano de corte y aumenta el deslizamiento a todos los niveles de carga.

- La resistencia a cortante en el plano de corte está en función del parámetro de armado  $pf_y$ .

- El efecto pasador de las barras de armado que cruzan el plano de corte es insignificante en el caso de probetas sin prefisuración, no siendo así en el caso de prefisuración.

- La teoría de "shear-friction" (fricción por cortante) proporciona una estimación conservativa de la resistencia a corte en el plano de corte en hormigón convencional.

#### **2.4.2. ALAN H. MATTOCK and NEIL M. HAWKINS (1972) [5].**

En este artículo se realiza un estudio sobre la transmisión del esfuerzo cortante en estructuras de hormigón armado. Para ello se estudian los siguientes factores:

1. Características del plano de corte
2. Características de la armadura de refuerzo
3. Resistencia del hormigón
4. Fuerzas directas actuando paralela o transversalmente al plano de corte

Los tres primeros factores se analizan sobre ensayos *push-off* en un estudio anterior [15]. Las probetas *push-off* se hormigonan monolíticamente. Para el estudio de la influencia de las fuerzas directas actuando paralela o transversalmente al plano de corte, se realizan probetas *pull-off*, en las que la carga aplicada es de tracción, o *push-off* modificadas, en las que el plano de corte está inclinado (ver figura 2.9).

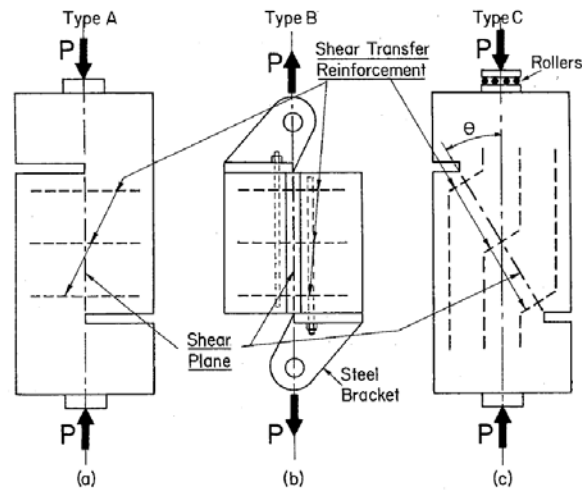


Figura 2.9: Probetas push-off utilizadas en el estudio. (a) Push-off; (b) Pull-off; (c) Push-off modificada [5]

Todas las probetas se someten a una carga uniformemente aumentada hasta la rotura de la pieza y se mide el deslizamiento a lo largo del plano de corte en cada una de ellas.

La necesidad de considerar una fisuración existente a lo largo del plano de corte antes de la aplicación de la carga fue recomendada por Mast, R. F., en estudios anteriores [17]. Por esta razón, algunas probetas son fisuradas por la aplicación de una fuerza transversal antes de someterlas a ensayo.

En las probetas fisuradas, se mide el deslizamiento, desde el comienzo del ensayo. Sin embargo, en las probetas no fisuradas, no se registra movimiento alguno hasta la aparición de unas fisuras diagonales a una tensión determinada. Estas fisuras cruzan el plano de corte con un ángulo de entre  $40^\circ$  y  $50^\circ$ , tienen una longitud de 5 cm y una separación entre ellas de 2,5 a 5 cm a lo largo del plano de corte (ver figura 2.10).

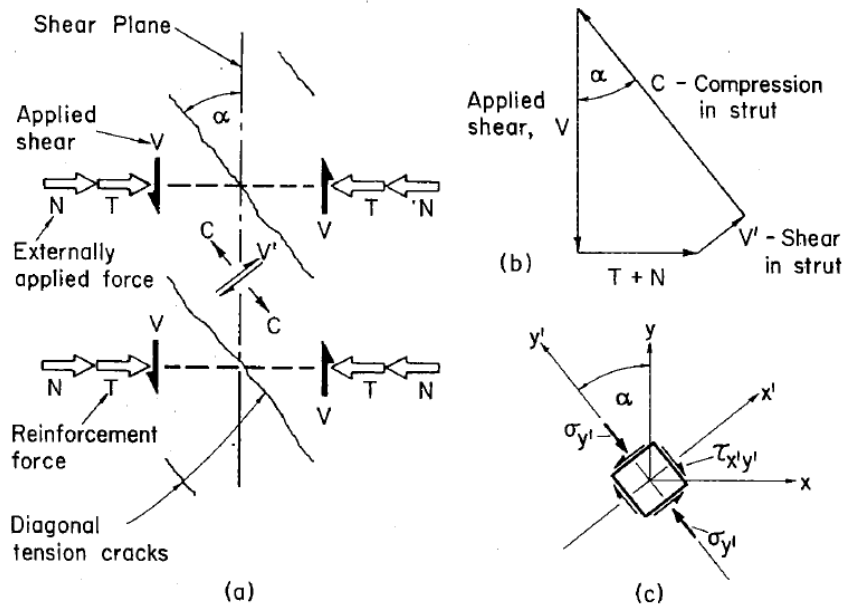


Figura 2.10: Transmisión de esfuerzo cortante en probetas no fisuradas [5]

En este artículo, se realiza una hipótesis para modelar el comportamiento, diferenciando entre la transferencia del esfuerzo cortante a través del plano de corte en probetas sin fisuración previa (1) y en probetas con fisuración previa (2) a lo largo del plano de corte.

1. Probetas sin fisuración previa a lo largo del plano de corte:

Se trata de probetas sin fisuración previa a lo largo del plano de corte y con armado normal a dicho plano. En este caso, se asume que las cargas externas provocan una tensión tangencial  $v$  a lo largo del plano de corte y tensiones directas  $\sigma_{Ny}$  y  $\sigma_{Nx}$  paralelas y normales al plano de corte, respectivamente. Cuando se produce el momento de la carga, el hormigón se encuentra no fisurado; el armado transversal  $A_{vf}$  no tiene tensión y, por lo tanto, no contribuye a una tensión directa adicional a través del plano de corte.

Bajo el incremento del cortante, cuando la tensión principal de tracción del hormigón llega a igualar la resistencia a tracción del hormigón, aparecen varias fisuras diagonales de tracción de corta longitud a lo largo del plano de cortante e inclinadas respecto de éste un ángulo  $\alpha$ . Este ángulo  $\alpha$  depende de la combinación particular de  $v$ ,  $\sigma_{Ny}$  y  $\sigma_{Nx}$  existente en el momento de la fisuración. En ensayos *push-off* sin tensión directa externa adicional  $\sigma_{Nx}$ , el valor de  $\alpha$  se encuentra, normalmente, alrededor de 45 grados.

Cuando la carga de corte se aumenta aún más se desarrolla un mecanismo de celosía tal y como se muestra en la figura 2.10 (a). Se forman bielas diagonales en el hormigón donde aparecen las fisuras de tracción (paralelas entre ellas). Cuando actúa la acción del cortante en la celosía, las bielas tienden a rotar y ello provoca que entren en tracción las armaduras transversales. Debido a que las bielas diagonales son continuas en el hormigón en ambos lados del plano de cortante, se tiene tanto compresión como cortante transversal en la biela. El cortante aplicado es, por tanto, resistido por ambas componentes de la biela: la compresión y



las fuerzas tangenciales que actúan paralelas al plano de cortante, tal y como se muestra en la figura 2.10 (b).

El armado que cruza el plano de corte puede llegar a su límite elástico:  $A_v f_{fy}$ , dando lugar a que no se produzca la rotura del hormigón primero. El fallo final tiene lugar cuando se produce la rotura de las bielas de hormigón bajo la acción combinada de la compresión y el cortante en las bielas, mientras el armado continua desarrollando su resistencia a la plastificación.

Para el cálculo, se considera un elemento de hormigón contenido en el plano de cortante, en la parte media del espesor de la biela. Tomando como referencia los ejes de coordenadas  $x'$  e  $y'$ , el sistema tensional que actúa en el elemento es el indicado en la figura 2.10 (c). Este sistema se compone de una compresión  $\sigma_{y'}$  actuando en dirección paralela a la dirección de las fisuras diagonales de tracción, y unas tensiones tangenciales  $\tau_{x'y'}$  orientadas como se muestra en la figura. Como las caras de la biela formadas por las fisuras diagonales de tracción son superficies sin cargar y libres, el valor de  $\sigma_{x'}$  es cero. El par de valores  $\sigma_{y'}$ ,  $\tau_{x'y'}$  se pueden obtener a partir de la envolvente de rotura del hormigón usando la construcción geométrica que aparece en la figura 2.11.

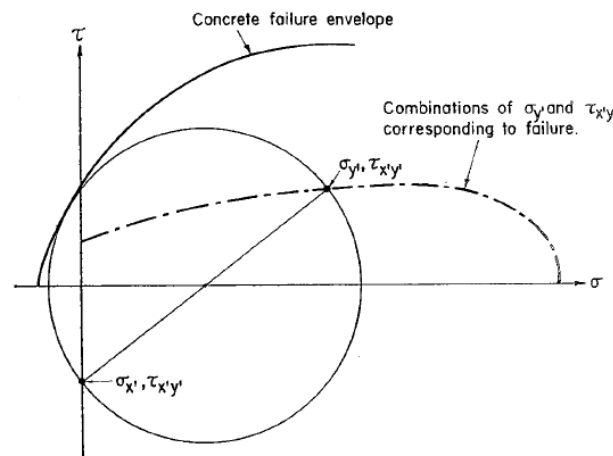


Figura 2.11: Combinación de  $\sigma_{y'}$ ,  $\tau_{x'y'}$  que provoca la rotura del hormigón [5]

Con ello se construye una sucesión de círculos de Mohr tangentes a la envolvente de rotura. La intersección de algún círculo en particular con el eje  $t$  definirá el punto  $(\sigma_{x'}, \tau_{x'y'})$ , donde  $\sigma_{x'}$  es cero. El punto diametralmente opuesto a éste en el mismo círculo es el punto  $(\sigma_{y'}, \tau_{x'y'})$ , donde los valores de  $\sigma_{y'}$  y  $\tau_{x'y'}$ , constituyen el par de tensiones correspondiente a la rotura del hormigón.

El estado tensional del elemento en el plano de corte se puede expresar con  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  con respecto a los ejes  $x$  e  $y$ , normal y paralelo al plano de corte, respectivamente. Estas tensiones pueden ir expresadas en función de  $\sigma_{y'}$  y  $\tau_{x'y'}$  como sigue:

$$\sigma_x = \sigma_{y'} \sin^2 \alpha - 2\tau_{x'y'} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.6)$$

$$\sigma_y = \sigma_{y'} \cos^2 \alpha + 2\tau_{x'y'} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.7)$$

$$\tau_{xy} = -\sigma_y' \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{x'y'}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (2.8)$$

Si  $\alpha = 45$  grados, entonces:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_y'}{2} - \tau_{x'y'} \quad (2.6a)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_y'}{2} + \tau_{x'y'} \quad (2.7a)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_y'}{2} \quad (2.8a)$$

En la rotura,  $\sigma_x$  es la tensión directa actuando a través del plano de cortante como resultado de la tensión de plastificación del armado que atraviesa dicho plano, más una tensión externa aplicada directamente  $\sigma_{Nx}$  actuando a través del plano de corte en la rotura:

$$\sigma_x = \frac{A_{vf}f_y}{bd} + \sigma_{Nx} = pf_y + \sigma_{Nx} \quad (2.9)$$

Donde  $A_{vf}$  es el área total de la sección del armado que pasa a través del plano de corte y  $f_y$  es la tensión de plastificación. Además,  $\tau_{xy}$  es la tensión tangencial en el plano de cortante, en el centro de la biela. De este modo, se puede escribir:

$$v_u = \frac{V_u}{bd} = K\tau_{xy} \quad (2.10)$$

Así que si  $\alpha = 45$  grados, entonces  $v_u = -K\sigma_y/2$  y  $pf_y + \sigma_{Nx} = \sigma_y/2 - \tau_{x'y'}$ . El valor de  $K$  será 1 si las tensiones tangenciales se encuentran uniformemente distribuidas a lo largo de la biela y puede valer 0.67 si la distribución de tensiones tangenciales a través de la biela es parabólica. Cuando la tensión normal externa  $\sigma_{Nx}$  es cero o pequeña, las bielas de hormigón rotarán ligeramente hasta deformar el armado transversal. Esto provoca el final del avance de las fisuras de tracción paralelas al plano de cortante. Como resultado, la tensión tangencial en la biela se incrementa localmente hasta un valor superior al de la tensión tangencial media  $v_u$  basada en el área total del plano de cortante. En este momento, la rotura tiende a cambiar del plano de cortante a un plano paralelo conteniendo el final de las fisuras y esto ocurre cuando la tensión tangencial local incrementada alcanza un valor crítico. Las bielas de hormigón en cada borde del plano de corte estarán incompletas, dependiendo de la localización exacta de las fisuras diagonales. En un caso extremo, esto podría reducir la resistencia total efectiva a corte de la sección.

2. Probetas con fisuración previa a lo largo del plano de corte y con armadura normal a dicho plano:

Cuando se carga a cortante una probeta inicialmente fisurada, se produce un deslizamiento a lo largo del plano de corte. Como las caras de la fisura tienen rugosidad, cuando se produce el deslizamiento, se fuerza la separación de las caras de las probetas. Esta separación produce deformaciones de tracción en el armado que cruza el plano de cortante. Esta tensión de tracción inducida en el armado se equilibra con una compresión igual actuando a través de la fisura. Esta fuerza de compresión produce una resistencia por fricción al deslizamiento entre las caras de la fisura, que se opone al cortante aplicado. El movimiento relativo del hormigón en las caras opuestas de la fisura someten a las barras individuales del armado a la acción de

corte. La resistencia de estas barras a la acción de corte, que muchas veces viene asociada a su efecto pasador, contribuye a la resistencia a corte total.

En un plano de cortante con baja cantidad de armado, la separación de las caras de las fisuras es eventualmente suficiente para deformar el armado hasta su punto de plastificación. Cuando se alcanza la resistencia última, la fuerza de compresión a través de la fisura es igual a la tensión de plastificación del armado  $A_v f_y$ . La resistencia por fricción al corte a lo largo de la fisura es, entonces, igual a esta fuerza multiplicada por el coeficiente de fricción del hormigón. En adición a la resistencia por fricción al cortante, hay una resistencia al cortante debida al efecto pasador del armado que cruza las fisuras en el plano de cortante, además de la resistencia producida por las irregularidades situadas en las caras de las fisuras. Se realiza la hipótesis de que la resistencia por fricción al deslizamiento y el efecto pasador producido por la armadura son las contribuciones principales a la resistencia al cortante.

La resistencia del hormigón no parece afectar a la resistencia a corte en el plano de corte de las piezas inicialmente fisuradas con baja cantidad de armadura.

En un plano de cortante con alta cantidad de armado es posible que la resistencia teórica a corte debida a la fricción y al efecto pasador llegue a ser superior al cortante que produce la rotura en piezas inicialmente no fisuradas que presenten las mismas características físicas. En este caso, las fisuras en el plano de corte se cierran y el comportamiento y la resistencia última llegan a ser los mismos que en el caso de piezas sin fisuración inicial. Cuando esto ocurre, la resistencia a corte depende de la resistencia del hormigón, al contrario que en el caso anterior.

En un plano de cortante con una cantidad de armado moderada, se forman las fisuras diagonales de cortante con un ángulo  $\alpha$  respecto del plano de corte, pero el fallo todavía se produce debido al deslizamiento a lo largo de la fisura en el plano de corte con una resistencia última a cortante inferior a la de las piezas sin fisuración previa.

En ese momento, el código de diseño americano ACI 318-71 [19] en su sección 11.15, usaba para el diseño de la transmisión del cortante a través del plano de corte la hipótesis del "*shear-friction*" [16, 17] tratada en el apartado anterior. Ésta no es más que una simplificación de la hipótesis de diseño del comportamiento del hormigón inicialmente fisurado descrita en este apartado. En la hipótesis del "*shear-friction*" se asume, como ya se ha descrito en el apartado anterior, que, por alguna razón no especificada, existe una fisura en el plano de corte. La resistencia a cortante se asume que se desarrolla, enteramente, por la resistencia al deslizamiento debido a la fricción entre ambas caras de la fisura, llevado a cabo por una fuerza normal igual al límite elástico del armado que cruza el plano de corte. Se utiliza, además, un coeficiente ficticio de fricción  $\mu$  para compensar el hecho de despreciar la acción del efecto pasador de las armaduras y otros factores en la resistencia a cortante:

$$v_u = \frac{A_v f_y}{bd} \mu = p f_y \mu \quad (2.11)$$

De este estudio se concluye que:

Al igual que se concluye en el apartado anterior (apartado 2.4.1):

- La hipótesis de "*shear-friction*" es conservativa en la estimación de la resistencia a cortante en el plano de corte, exista o no fisura previa.

- La presencia de la prefisura reduce la resistencia última a cortante en el plano de corte y aumenta el deslizamiento a todos los niveles de carga.

- La resistencia a cortante en el plano de corte está en función del parámetro de armado  $\rho f_y$ .

Además se añaden, entre otras, las conclusiones:

- Las tensiones directas a tracción paralelas al plano de corte reducen la resistencia al esfuerzo cortante en el plano de corte en hormigón inicialmente no fisurado, no ocurriendo lo mismo en el hormigón inicialmente fisurado.

- Se puede añadir al término  $\rho f_y$  en los cálculos de la resistencia última a cortante en el plano de corte, una tensión de compresión aplicada externamente actuando en dirección transversal al plano de corte, tanto en hormigón inicialmente fisurado como no fisurado.

- La resistencia a cortante en el plano de corte del hormigón inicialmente no fisurado se desarrolla a través de un mecanismo de celosía tras la fisuración diagonal. La rotura se produce cuando las bielas inclinadas de hormigón fallan bajo la acción combinada de corte y de fuerza axial.

- La resistencia a cortante en el plano de corte del hormigón inicialmente fisurado con cantidades moderadas de armadura se desarrolla, principalmente, por la resistencia por fricción al deslizamiento entre las caras de la fisura y por el efecto pasador de las armaduras que cruzan el plano de corte. Cuando se colocan grandes cantidades de armado, las fisuras en el plano de corte se cierran y la resistencia a cortante en el plano de corte se desarrolla como en el caso de hormigón inicialmente no fisurado.

### **2.4.3. ALAN H. MATTOCK, L. JOHAL and H. C. CHOW (1975) [10].**

Los objetivos de este estudio son:

1. Determinar el efecto del momento actuando en el plano de corte en el cortante que puede ser transmitido a través el plano de corte con una cantidad y disposición de armado dada.

2. Estudiar la influencia de la disposición del armado que cruza el plano de corte en el cortante y en el momento que pueden ser transferidos a través del plano de corte.

3. Determinar el efecto de una fuerza de tracción actuando de forma perpendicular al plano de cortante, en el cortante que puede ser transferido a través del plano de corte.

La parte experimental de este estudio se compone de seis series de probetas tipo *push-off*. Algunas de ellas son probetas tipo *push-off* tipo ménsula y las otras son probetas tipo *push-off* en las que se aplica una tracción a través del plano de corte, tal y como se muestra en la figura 2.12. También se tiene en cuenta la presencia de fisura previa o no.

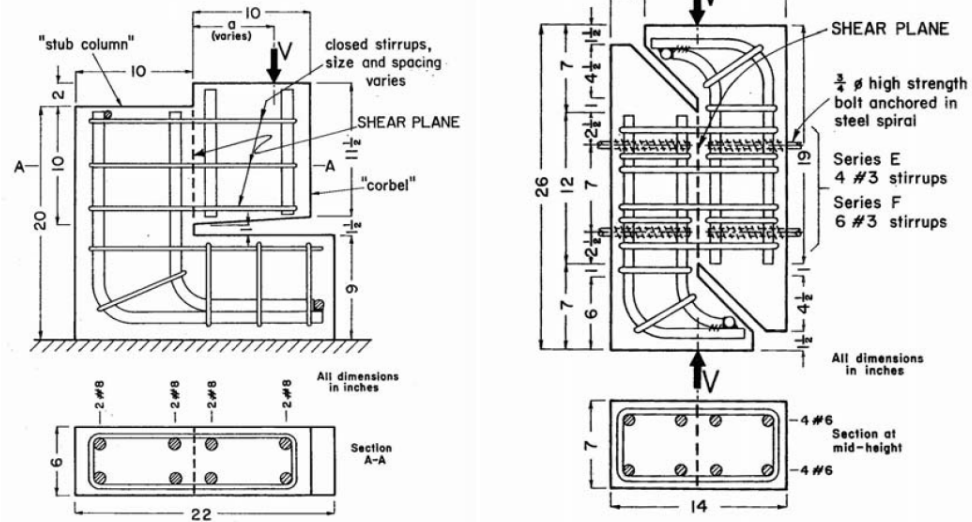


Figura 2.12: (Izq.) Probeta push-off tipo ménsula; (Der.) Probeta Push-off con tracción perpendicular al plano de corte [10]

En el ensayo *push-off* tipo ménsula, se aplica una carga  $V$  a una distancia  $a$  del plano de corte. Esto provoca un cortante  $V$  y un momento  $V \cdot a$ , actuando simultáneamente en el plano de corte.

Las muestras sometidas a la otra tipología de ensayo *push-off*, contienen un par de barras de alta resistencia a cada lado. En este ensayo, se aplica una carga  $V$  en el plano de corte, de tal manera que no provoca momentos adicionales. A las barras laterales mencionadas anteriormente, se aplica una carga de tracción que provoca una tracción transversal al plano de corte.

Centrando este estudio en las características de lo que se estudia en este trabajo, se extrae que para probetas tipo ménsula y excentricidad de la carga igual a cero (sólo cortante en el plano de corte), el deslizamiento último se incrementa cuando la distribución de armado cambia de distribución uniforme sobre el plano de corte a concentrado en la parte superior del plano de corte.

Se observa que cuando una fisura en el plano de corte es sometida solamente a cortante, sólo la parte de la fisura que se encuentra atravesada por la armadura es completamente resistente al deslizamiento. Si se concentra el armado, la resistencia a cortante media se ve aumentada en la parte del plano de corte completamente resistente al deslizamiento, si se compara con el caso de distribución uniforme.

El modelo para el cálculo que se utiliza en este estudio es el basado en la hipótesis del "*shear-friction*" según el código de diseño americano ACI 318-71 [19] en su sección 11.15 (ya mencionado en los apartados 2.4.1 y 2.4.2 de este mismo trabajo)

De este estudio, centrandose en las condiciones que se desarrollan en el presente trabajo, se concluye:

- La acción simultánea de un momento menor o igual que la resistencia a flexión última de la sección fisurada no reduce el cortante que puede ser resistido en el plano de corte.

- Al igual que se deduce en los dos apartados anteriores (2.4.1 y 2.4.2), la hipótesis del "shear friction" ofrece una estimación conservativa de la resistencia a cortante en el plano de corte, con y sin tensión de tracción externa actuando de forma perpendicular al plano de corte.

#### 2.4.4. ALAN H. MATTOCK, W. K. LI and T. C. WANG (1976) [20].

Este artículo va enfocado al estudio de la resistencia al esfuerzo cortante de hormigón hecho con árido de bajo peso para la obtención de hormigones ligeros para prefabricados. Se sigue la misma línea en cuanto a procedimiento que la utilizada en los apartados anteriores de este trabajo (apartados 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3).

El programa experimental se diseña para estudiar la influencia en el comportamiento y en la resistencia en la dirección de aplicación del plano de corte, del tipo de árido usado cuando se fabrica el hormigón. Las probetas que se usan para los ensayos son probetas tipo *push-off* tal y como se muestra en la figura 2.13. Se someten a un esfuerzo de corte sin momento. El armado que cruza el plano de cortante está compuesto por cercos cerrados.

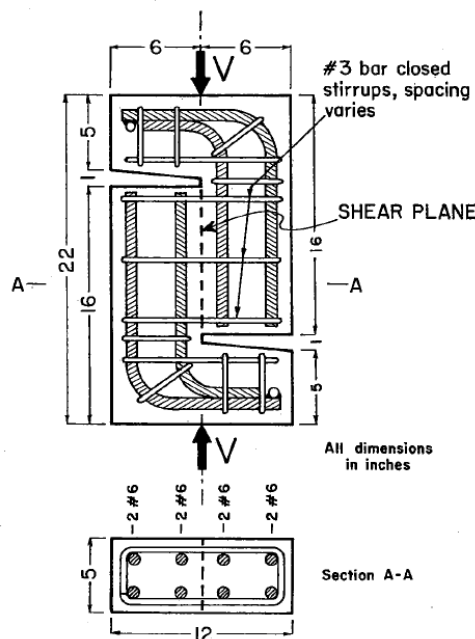


Figura 2.13: Probeta tipo *push-off* utilizada en este estudio [20]

Se ensayan diez series de probetas tipo *push-off*. Las variables que se estudian son el tipo de árido utilizado, la resistencia del hormigón y si se existe o no prefisuración en el plano de corte al realizar el ensayo.

De la campaña experimental se observa que el comportamiento general entre las probetas sin fisuración previa es muy similar. No hay deslizamiento a lo largo del plano de corte (como ya se ha deducido en los apartados anteriores [5]), ni tampoco hay separación a través del

plano de cortante de estas probetas hasta la formación de las fisuras diagonales por tracción en la región del plano de corte. Estas fisuras tienen una inclinación inicial de entre 20 y 45 grados del plano de corte. Conforme va aumentando la carga, algunas fisuras se alargan y se forman también nuevas fisuras. Normalmente, cuando se produce la rotura hay muchas más fisuras en probetas con mayor cantidad de armado que en probetas con armado menor. Tal y como ya se dedujo en los apartados anteriores, la rotura se produce por aplastamiento de las bielas de hormigón formadas a partir de las fisuras por tracción. Como se ha dicho, en las probetas de hormigón sin fisuración previa no hay deslizamiento a lo largo del plano de corte. Se produce un movimiento relativo de las dos mitades de la probeta como resultado de la rotación de las bielas inclinadas de compresión del hormigón, mientras el armado que cruza el plano de cortante se estira. La componente de este movimiento relativo paralelo al plano de corte se refiere como deslizamiento más adelante (para abreviar). La componente del movimiento relativo normal al plano de cortante se refiere como separación.

En las probetas con fisuración previa, también se produce un comportamiento similar. Tal y como se apunta en el apartado 2.4.2 de este mismo documento [5], se produce un deslizamiento a lo largo de la fisura realizada en el plano de corte desde el comienzo de la carga. Este deslizamiento se va incrementando conforme se llega a la situación de rotura, que se produce por aplastamiento por compresión del hormigón adyacente al plano de la fisura.

En este artículo [20] se obtienen las curvas cortante-deslizamiento, como se muestra en la figura 2.14:

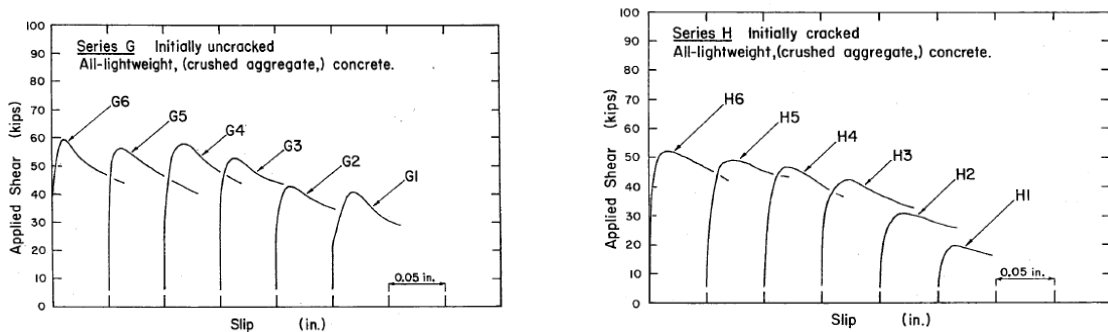


Figura 2.14: (Izq.) Curvas cortante-deslizamiento para probetas no prefisuradas: Serie G; (Der.) Curvas cortante-deslizamiento para probetas prefisuradas: Serie H [20]

En estas curvas (figura 14) se puede observar que el comportamiento frente a la deformación es relativamente frágil en todos los casos. La máxima resistencia a cortante no se mantiene mientras el deslizamiento se incrementa más allá del valor para el cual se desarrolla la máxima resistencia a cortante.

El comportamiento de las probetas no prefisuradas es más frágil que el de las prefisuradas, en las que la resistencia al cortante después del pico decrece más rápidamente conforme aumenta el deslizamiento. Sin embargo, debido a que la resistencia última de las probetas no prefisuradas es mayor que la de las probetas prefisuradas, las resistencias residuales de ambos tipos de probetas son aproximadamente las mismas para un valor de deslizamiento determinado.

Se obtiene que el respuesta a la deformación llega a ser más frágil conforme la resistencia a compresión del hormigón es mayor; y, además, llega a ser más frágil aun en el caso de hormigones ligeros que en hormigones convencionales.

En estudios mencionados en el apartado 2.4.2 anterior [5], se postula que el límite superior de la resistencia a corte de probetas inicialmente fisuradas con una resistencia a compresión en particular, resultaba del efecto de "cerrado" de las fisuras y, por tanto, un comportamiento similar al equivalente con probetas sin fisuración previa. No obstante, éste no parece ser el caso de los hormigones ligeros en los que no hay ninguna evidencia del efecto "cerrado".

Al contrario que ocurre en el caso del apartado 2.4.2 [5], la resistencia a cortante en el plano de corte en el caso de hormigones ligeros no está relacionada con la tensión de rotura por aplastamiento de las bielas de hormigón provocada por la tracción en las fisuras del hormigón.

Las diferencias en las tensiones tangenciales que puede haber entre el hormigón convencional y el hormigón ligero para la misma resistencia a compresión son probablemente debidas a la diferencia de rugosidad en las caras de las fisuras.

También se realiza la modelización con las hipótesis del "*shear-friction*" y del *PCI Design Handbook* vistos en [15, 19, 5, 21]. De esta modelización se extraen, entre otras, las siguientes conclusiones:

- La resistencia a cortante en el plano de corte del hormigón ligero es inferior a la del hormigón convencional.

- Las hipótesis del "*shear friction*" [15,19, 5], se pueden usar para el diseño de hormigón ligero al igual que se hace con el hormigón convencional (según se ha descrito en los apartados 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3 de este mismo documento) pero teniendo en cuenta una serie de particularidades en cuanto al valor del coeficiente de fricción  $\mu$ .

- El *PCI Design Handbook* no es aplicable para hormigón ligero [21].

#### **2.4.5. J. C. WALRAVEN (1981) [22]**

En este artículo se desarrolla un modelo basado en el análisis estadístico de la estructura de la fisura y las áreas de contacto asociadas entre las caras de las fisuras como función del desplazamiento por cortante ( $\Delta$ ), del ancho de la fisura ( $w$ ) y de la mezcla del hormigón. Aquí se desprecia el efecto pasador de las armaduras que cruzan el plano de cortante, por lo que este estudio se concentra, principalmente, en la influencia del engranamiento de áridos.

Se entiende que el hormigón se puede representar como un sistema de dos fases: la matriz de cemento y el conjunto de áridos embebido en el cemento. Generalmente la zona de contacto entre la matriz de cemento y la partícula de árido es la zona más débil. Por ello, la fisura se produce en la matriz de cemento pero en la zona situada en la periferia de la partícula de árido. Las partículas de árido se suelen simplificar como esferas, las cuales pueden ser intersectadas por el plano de cortante a cualquier profundidad con la misma probabilidad. Esto conduce a la estructura de la fisura, tal y como se muestra en la figura 2.15.



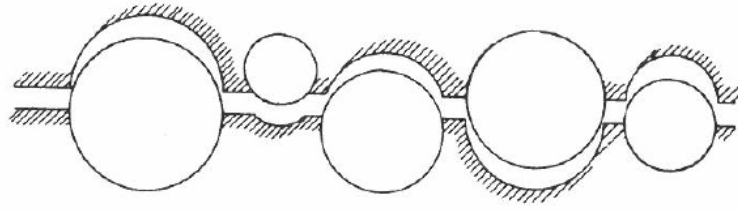


Figura 2.15: Estructura general del plano de la fisura observada [22].

Considerando esta figura y teniendo en cuenta que el tamaño de muchas partículas es considerablemente mayor que el ancho de la fisura, se puede concluir que la microrrugosidad de la fisura, causada por las partículas del árido proyectadas sobre el plano de la fisura, domina la macrorrugosidad, provocada por las ondulaciones de las caras de la fisura. Por esta razón, se considera el plano de la fisura como un plano liso.

Se entiende, cuando se produce el desplazamiento por cortante de las caras de las fisuras, que se desarrollan unas áreas de contacto en la superficie de las partículas debido a la deformación plástica de la matriz de cemento, tal y como se muestra en la figura 2.16.

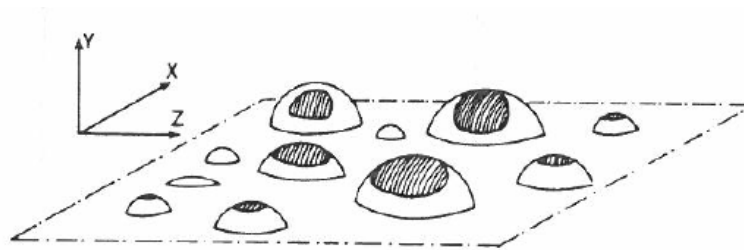


Figura 2.16: Áreas de contacto durante el deslizamiento en la dirección del eje x [22].

Las tensiones producidas en estas áreas producen reacciones en las direcciones de todos los ejes principales. Como resultado de la aceptación de que las partículas del árido son esféricas, la componente de la resultante en la dirección Z es cero. Como resultado de esto, es posible considerar un cuerpo fisurado, como se muestra en la figura 2.17 (a), como un ensamblaje de un gran número de rebanadas con un ancho finito cada una, como se muestra en la figura 2.17 (c), y es posible derivar el comportamiento del conjunto de la fisura estudiando el comportamiento de una rebanada.

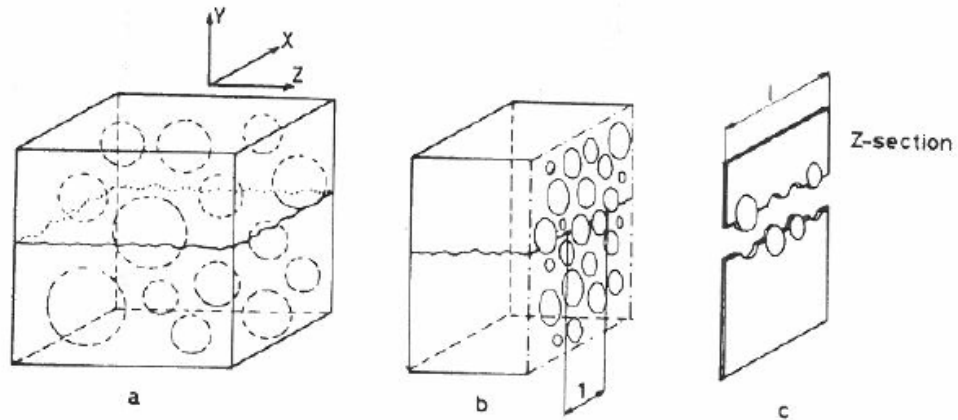


Figura 2.17: (a) Cuerpo de hormigón fisurado, (b) plano Z de intersección, (c) rebanada representativa [22].

En la figura 2.18 se muestra una sección transversal sobre el plano Z en la que hay una línea de contacto entre las caras opuestas de la fisura. Las proyecciones de esta línea de contacto sobre el eje x y sobre el eje y constituyen  $a_x$  y  $a_y$ . El área sombreada representa la parte de la matriz donde tiene lugar la deformación plástica.

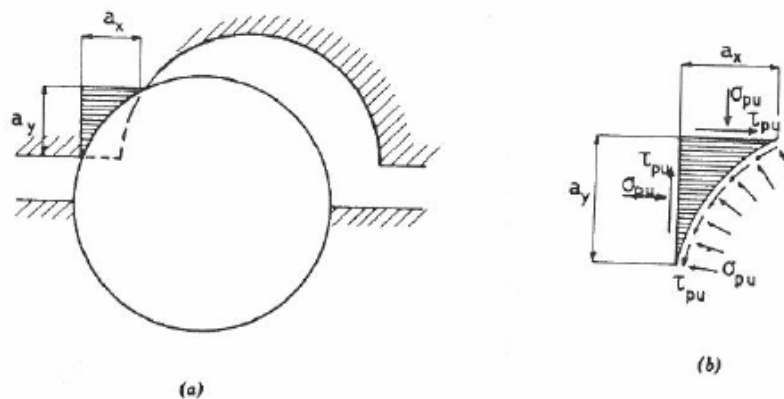


Figura 2.18: (a) Área de contacto entre la matriz y el árido, (b) condiciones tensionales [22].

Si el cortante se va incrementando en el plano de corte y la abertura de la fisura se contrarresta con fuerzas de restricción, se desarrolla el siguiente mecanismo: las áreas de contacto tienden inicialmente a deslizar provocando que el área de contacto se reduzca, lo que conduce a tensiones de contacto muy elevadas. Por ello, se producen mayores deformaciones plásticas hasta que se obtiene el equilibrio de fuerzas en dirección x e y.

Las tensiones en el área de contacto se resuelven en una tensión,  $\sigma_{pu}$ , normal al área de contacto y una tensión,  $\tau_{pu}$ , tangencial a esta área. Estas dos tensiones se relacionan a partir del deslizamiento de la superficie como:

$$\tau_{pu} = \mu \sigma_{pu} \quad (2.12)$$

Las componentes de las fuerzas de contacto en dirección x e y se pueden descomponer basándose en la aceptación de una combinación uniforme de las tensiones críticas. La figura

2.18 (b) muestra las condiciones de equilibrio en la superficie de la partícula. Las reacciones en dirección x y en dirección y se pueden formular como:

$$F_y = \sigma_{pu} \cdot a_x - \tau_{pu} \cdot a_y \quad (2.12 a)$$

$$F_x = \sigma_{pu} \cdot a_y + \tau_{pu} \cdot a_x \quad (2.12 b)$$

Si se considera el conjunto de partículas por unidad de longitud de la fisura (ver figura 2.17 (b)), la formulación se generaliza como:

$$\sum F_y = \sigma_{pu} \cdot \sum \bar{a}_x - \tau_{pu} \cdot \sum \bar{a}_y \quad (2.13 a)$$

$$\sum F_x = \sigma_{pu} \cdot \sum \bar{a}_y + \tau_{pu} \cdot \sum \bar{a}_x \quad (2.13 b)$$

donde  $\sum \bar{a}_x$  y  $\sum \bar{a}_y$  son la proyección media más probable de la longitud de contacto por unidad de longitud de fisura considerada en la figura 2.17 (b). Si las longitudes  $\sum \bar{a}_x$  y  $\sum \bar{a}_y$  son conocidas, es posible proceder en las áreas de contacto como sigue: una unidad de área se puede considerar estar compuesta por un infinito número de líneas por unidad de longitud, las cuales tienen la misma media de valores de  $\sum \bar{a}_x$  y  $\sum \bar{a}_y$ . Por lo que las áreas de contacto más probables  $\bar{A}_x$  y  $\bar{A}_y$  por unidad de área de la fisura se obtienen tras multiplicar  $\sum \bar{a}_x$  y  $\sum \bar{a}_y$  por el ancho unitario  $l$ , de modo que  $\bar{A}_x = \sum \bar{a}_x \cdot l$  y  $\bar{A}_y = \sum \bar{a}_y \cdot l$ . De este modo se puede expresar:

$$\sigma = \sigma_{pu} \cdot (\bar{A}_x - \mu \cdot \bar{A}_y) \quad (2.14 a)$$

$$\tau = \sigma_{pu} \cdot (\bar{A}_y + \mu \cdot \bar{A}_x) \quad (2.14 b)$$

En este mismo artículo se muestra un modo de cálculo de las áreas de contacto proyectadas  $\bar{A}_x$  y  $\bar{A}_y$ .

Para comparar el modelo teórico se realiza también una campaña experimental de ensayos tipo *push-off* restringidos externamente y con prefisuración (ver figura 2.19).

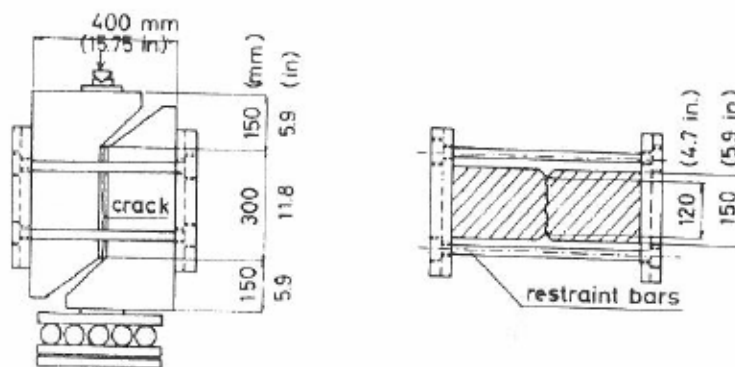


Figura 2.19: Probetas tipo *push-off* con restricción externa [22].

Las variables que se tienen en cuenta en la campaña experimental son la resistencia y la composición del hormigón, la rigidez de la restricción externa y el ancho de la fisura previa.

De este estudio se extraen, entre otras, las siguientes conclusiones:

- El mecanismo de engranamiento de áridos sólo puede ser adecuadamente descrito si se tiene en cuenta la tensión normal, la tensión tangencial, el ancho de fisura y el deslizamiento por cortante.

- El engranamiento de áridos se caracteriza, básicamente, por dos modos de comportamiento: deslizamiento en el área de contacto entre la matriz de cemento y las partículas de árido en los lados opuestos de la fisura, y por la deformación irreversible de la matriz por alta tensión de contacto.

- Los resultados experimentales se describen adecuadamente por el modelo físico simplificando las partículas del árido como esferas de diferentes tamaños, proyectando sobre una superficie plana de la fisura y adoptando una relación tensión-deformación rígido-plástica entre las partículas y la matriz de cemento.

- Todas las fracciones de partículas contribuyen cualitativamente de la misma forma a la transmisión de la tensión a través de la fisura. Sólo aquellas que tienen un diámetro inferior a dos veces el tamaño de la fisura se consideran inactivas.

#### 2.4.6. F.J. VECCHIO and M. P. COLLINS (1981) [3].

En este artículo se describen los resultados preliminares de un estudio sobre la respuesta del hormigón a cortante puro.

El estudio experimental se realiza con paneles armados con dos capas de mallazo de acero soldado. Las probetas tipo panel se cargan por medio de uniones fijadas a unas llaves de acero para cortante y unos gatos hidráulicos, tal y como se muestra en la figura 2.1 de este mismo documento.

Para el análisis de los datos obtenidos de las probetas se usa la construcción del Círculo de Mohr tanto de tensiones como de deformaciones, tal y como muestra la figura 2.20.

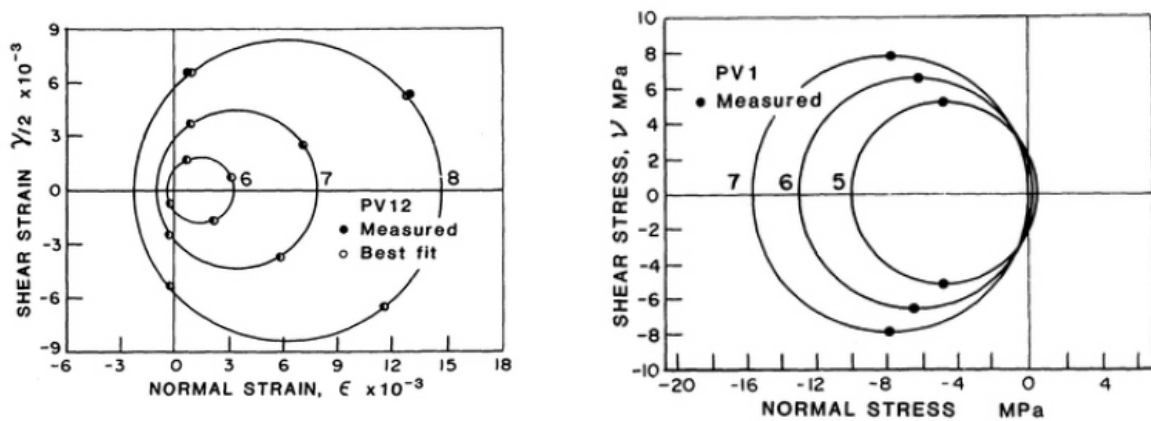


Figura 2.20: (izq.) Círculo de Mohr en deformaciones para una probeta determinada, (der.) círculo de Mohr en tensiones para una probeta determinada [3].

Para modelar el comportamiento del hormigón a compresión de los paneles se usa una variación de la curva tensión-deformación parabólica del hormigón usada normalmente:

$$f_d = f'_c \cdot [2 \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} - \lambda (\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0})^2] \quad (2.15)$$

$$\lambda = (\frac{\gamma_m}{\varepsilon_d} - \mu)^{0.5} \quad (2.16)$$

donde:  $\varepsilon_d$  = deformación principal a compresión,  $\gamma_m$  = deformación máxima a cortante,  $\mu$  = ratio de Poisson.

Aquí se toma como ratio de Poisson  $m = 0.30$ .

Para un ratio de  $\gamma_m/\varepsilon_d$  dado, el pico de tensión a compresión del hormigón alcanzable,  $f_p$ , es:

$$f_p = \frac{f'_c}{\lambda} \quad (2.17)$$

La deformación para la cual se alcanza este pico es:

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \quad (2.18)$$

En resumen, dada la deformación principal de compresión ( $\varepsilon_d$ ) y la deformación máxima por cortante ( $\gamma_m$ ), la tensión principal a compresión ( $f_d$ ) se puede determinar como sigue:

(i) Se determina el coeficiente,  $\lambda$ :

$$\lambda = (\frac{\gamma_m}{\varepsilon_d} - 0.3)^{0.5} \quad (2.19)$$

(ii) Se determina el pico de tensión y el pico de deformación,  $f_p$  y  $\varepsilon_p$  respectivamente:

$$f_p = \frac{f'_c}{\lambda} \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \quad (2.21)$$

(iii) Si  $\varepsilon_d \leq \varepsilon_p$ :

$$f_d = f'_c \cdot [2 \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} - \lambda (\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0})^2] \quad (2.22)$$

(iv) Si  $\varepsilon_d > \varepsilon_p$ :

$$f_d = f_p \cdot (1 - \eta^2) \quad (2.23)$$

$$\eta = \frac{(\varepsilon_d - \varepsilon_p)}{(2\varepsilon_0 - \varepsilon_p)} \quad (2.24)$$

Para modelar el comportamiento del hormigón a tracción se tiene en cuenta lo siguiente: se observa que el hormigón, después de haber fisurado, todavía es capaz de soportar cierta tensión de tracción. Esta tensión, que es el resultado de la tensión de tracción del hormigón entre las fisuras, debe ser inferior que la tensión de fisuración del hormigón,  $f_{cr}$ , pero significativamente superior a cero. Mientras las relaciones de equilibrio se escriben en

términos de tensiones medias, éstas serán aun necesarias para que el armado transmita las cargas a través de las fisuras. En estas posiciones las tensiones de tracción en el hormigón no pueden ayudar al armado. Así que, cuando las tensiones medias en el armado se acerquen a la plastificación, las tensiones de tracción medias en el hormigón se asumen cercanas a cero.

Basándose en el comportamiento observado de los paneles, se sugiere el siguiente procedimiento para calcular la tensión principal media a tracción,  $f_{dt}$ , a partir de la deformación principal a tracción,  $\epsilon_{dt}$ .

(i) Antes de fisurar:

$$f_{dt} = (\epsilon_{dt} - 0.15\epsilon_d) \cdot E_c \leq f_{cr} \quad (2.25)$$

donde:

$$E_c = \frac{2f'_c}{\epsilon_0} \quad (2.26)$$

$$f_{cr} = 0.33\sqrt{f'_c} \text{ (MPa)} \quad (2.27)$$

(ii) Después de fisurar:

$$f_{dt} = f_{cr} \frac{1}{1 + (\frac{\epsilon_{dt}}{0.005})^{0.5}} \leq \rho_l(f_{sty} - f_{sl}) \sin^2 \theta + \rho_t(f_{sty} - f_{st}) \cos^2 \theta \quad (2.28)$$

Por tanto, para predecir la respuesta de los paneles, para una deformación principal de compresión dada,  $\epsilon_d$ , se entra en el procedimiento iterativo que se muestra en la figura 2.21. Además, es necesario estimar dos condiciones de deformación:  $\epsilon_l$  y  $\theta$ . Se comprueban las condiciones de equilibrio y de compatibilidad y se ajustan las estimaciones hasta que se consiga la convergencia.

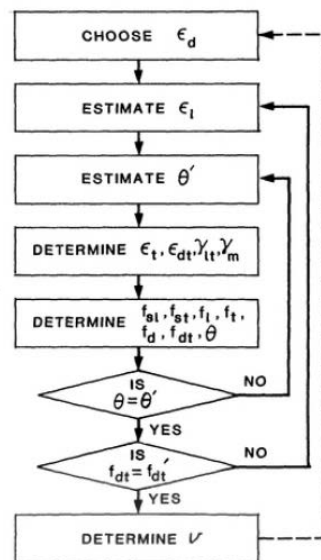


Figura 2.21: Proceso de solución para la respuesta a cortante puro de un elemento de hormigón armado [3].

Paso 1: Elegir un valor de deformación principal de compresión,  $\epsilon_d$ .

Paso 2: Estimar la deformación longitudinal,  $\epsilon_l$ .

Paso 3: Estimar un ángulo de inclinación de la deformación principal a compresión,  $\theta'$ .

Paso 4: Determinar todas las demás condiciones de deformación a partir del círculo de Mohr en deformaciones, figura 2.22.

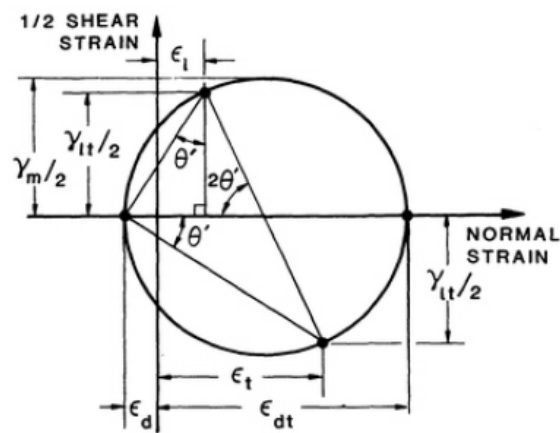


Figura 2.22: Condiciones de equilibrio para deformaciones medias en el hormigón [3].

(i) Deformación normal de corte  $\gamma_{lt}$ :

$$\gamma_{lt} = \frac{2(\epsilon_l + \epsilon_d)}{\tan \theta'} \quad (2.29)$$

(ii) Deformación transversal del acero,  $\epsilon_t$ :

$$\epsilon_t = \frac{\gamma_{lt}}{2 \tan \theta'} - \epsilon_d \quad (2.30)$$

(iii) Deformación principal de tracción,  $\epsilon_{dt}$ :

$$\epsilon_{dt} = \epsilon_l + \epsilon_t + \epsilon_d \quad (2.31)$$

(iv) Máxima deformación a cortante,  $\gamma_m$ :

$$\gamma_m = \epsilon_l + \epsilon_t + 2\epsilon_d \quad (2.32)$$

Paso 5: Determinar las condiciones de tensión a partir del círculo de Mohr en tensiones, figura 2.23:

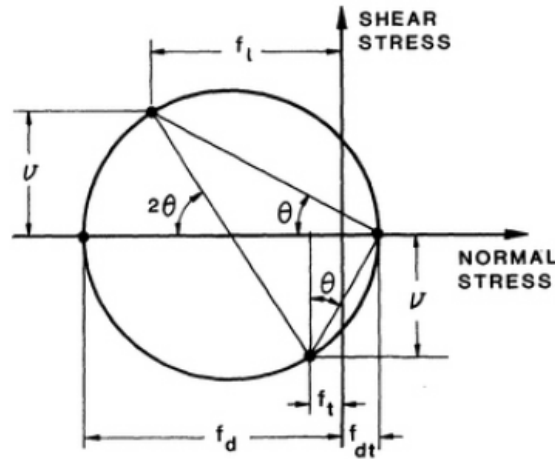


Figura 2.23: Condiciones de equilibrio para tensiones medias en el hormigón [3].

(i) Tensión longitudinal de tracción en el acero,  $f_{sl}$ :

$$f_{sl} = \varepsilon_l E_s \leq f_{sly} \quad (2.33)$$

(ii) Tensión transversal de tracción en el hormigón,  $f_{st}$ :

$$f_{st} = \varepsilon_t E_s \leq f_{sty} \quad (2.34)$$

(iii) Tensión longitudinal de compresión en el hormigón,  $f_l$ :

$$f_l = \rho_l f_{st} \quad (2.35)$$

(iv) Tensión transversal de compresión en el hormigón,  $f_t$ :

$$f_t = \rho_t f_{st} \quad (2.36)$$

(v) Tensión principal de compresión en el hormigón,  $f_d$ :

$$\lambda = \left( \frac{\gamma_m}{\varepsilon_d} - 0.3 \right)^{0.5} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \quad (2.18)$$

$$f_p = \frac{f'_c}{\lambda} \quad (2.20)$$

$$\eta = \frac{(\varepsilon_d - \varepsilon_p)}{(2\varepsilon_0 - \varepsilon_p)} \quad (2.24)$$

Si  $\varepsilon_d \leq \varepsilon_p$ :

$$f_d = f'_c \cdot \left[ 2 \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} - \lambda \left( \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (2.22)$$

Si  $\varepsilon_d > \varepsilon_p$ :

$$f_d = f_p \cdot (1 - \eta^2) \quad (2.23)$$

(vi) Tensión principal a tracción del acero,  $f_{dt'}$ :



$$f_{cr} = 0.33\sqrt{f'_c(MPa)} \quad (2.27)$$

$$E_c = \frac{2f'_c}{\varepsilon_0} \quad (2.26)$$

Antes de fisurar:

$$f'_{dt} = (\varepsilon_{dt} - 0.15\varepsilon_d) \cdot E_c \leq f_{cr} \quad (2.25)$$

Después de fisurar:

$$f'_{dt} = f_{cr} \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon_{dt}}{0.005}\right)^{0.5}} \leq \rho_l(f_{sly} - f_{sl}) \sin^2 \theta + \rho_t(f_{sty} - f_{st}) \cos^2 \theta \quad (2.28)$$

(vii) Ángulo de inclinación de la tensión principal de compresión (obtenido a partir del círculo de Mohr de la figura 2.23).

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{f_d - f_l}{f_d - f_t}} \right] \quad (2.37)$$

Paso 6: Comprobar la compatibilidad:

Es  $\theta = \theta'$  ?

Sí, ir al paso 7.

No, ir al paso 3.

Paso 7: Comprobar el equilibrio:

Del círculo de tensiones de la figura 2.23:

$$f_{dt} = f_d - f_l - f_t \quad (2.38)$$

Es  $f_{dt} = f_{dt}'$  ?

Sí, ir al paso 8.

No, ir al paso 2.

Paso 8: Determinar la tensión de corte a partir de la figura 2.23:

$$v = (f_d - f_t) \cdot \tan \theta \quad (2.39)$$

Paso 9: Incrementar  $\varepsilon_d$  y repetir el proceso:

$$0 < \varepsilon_d \leq 1.5 \varepsilon_0$$

$$\Delta\varepsilon_d \approx 0.05 \varepsilon_0 \text{ a } 0.10 \varepsilon_0$$

De este artículo se concluye, entre otras:

- A partir de los resultados obtenidos de la campaña experimental de paneles, se demuestra que la relación entre la tensión principal de compresión en el hormigón y la

deformación principal del hormigón son altamente dependientes de la coexistente deformación máxima por cortante. Además, se obtiene que para predecir con precisión las características de deformación de los paneles es necesario tener en cuenta las tensiones de tracción en el hormigón.

- Se desarrollan modelos matemáticos para representar las características tensión-deformación del hormigón. Usando estos modelos en los cuales las condiciones de equilibrio se basan en tensiones medias y las condiciones de compatibilidad se basan en deformaciones medias, es posible predecir con exactitud el comportamiento de los paneles.

### 2.4.7. F.J. VECCHIO and M. P. COLLINS (1986) [23].

"The Modified Compression-Field Theory" para elementos de hormigón sometidos a cortante que se presenta en este artículo se ha desarrollado a partir del modelo "Compresion-Field Theory" [24, 25] para hormigón armado sometido a torsión y a cortante. En ambos casos se trata el hormigón fisurado como un nuevo material y las características del material se tratan en términos medios tanto de tensiones como de deformaciones pero, mientras el original "Compresion-Field Theory" ignora las tracciones en el hormigón fisurado, este nuevo modelo tiene en cuenta tensiones de tracción en el hormigón entre las fisuras y emplea relaciones tensión-deformación medias para el hormigón fisurado verificadas experimentalmente. El modelo es capaz de predecir la respuesta carga-deformación de elementos de hormigón armado sometidos a cortante y tensiones normales en su plano.

En la figura 2.24 se esquematiza el elemento membrana objeto de estudio con los ejes y cargas que se tienen en cuenta para la definición del problema.

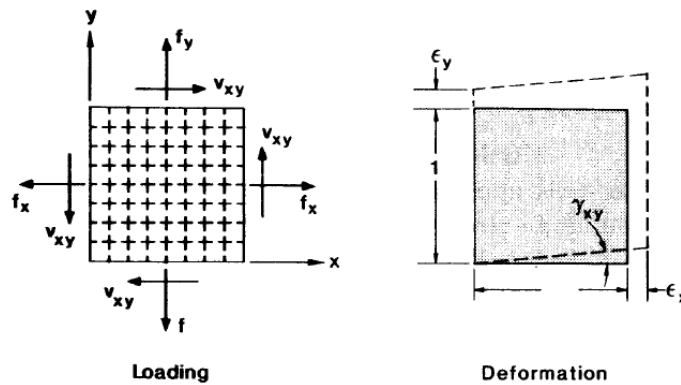


Figura 2.24: Elemento membrana [23].

El problema que se plantea es el de determinar cómo las tres tensiones en el plano:  $f_x$ ,  $f_y$  y  $v_{xy}$  se relacionan con las tres deformaciones en el plano  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$ . Para resolver este problema, además se tendrán en cuenta las siguientes condiciones:

1. Para cada estado de deformación existe únicamente un estado de tensión; no se tendrán en cuenta las situaciones en las que influye el historial de carga.

2. Tensiones y deformaciones se pueden considerar en términos medios cuando se consideren áreas o distancias suficientemente grandes para incluir varias fisuras.

3. El hormigón y las barras de armado se encuentran perfectamente adheridas en los extremos del elemento.

4. Las armaduras longitudinales y transversales se encuentran uniformemente distribuidas en el elemento.

Las tensiones y las deformaciones a tracción se consideran positivas.

CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD:

Asumiendo que el armado está anclado al hormigón, la compatibilidad requiere que cualquier deformación provocada en el hormigón genera la misma deformación en el armado. Cualquier cambio en la deformación del hormigón provocará el mismo cambio en la deformación del armado.

Partiendo de la misma deformación inicial para el hormigón que para el armado:

$$\epsilon_{sx} = \epsilon_{cx} = \epsilon_x \quad (2.40)$$

y

$$\epsilon_{sy} = \epsilon_{cy} = \epsilon_y \quad (2.41)$$

Si las tres componentes de deformación  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  son conocidas, entonces la deformación en cualquier otra dirección se puede hallar a partir de la construcción del círculo de Mohr para deformaciones, tal y como se muestra en la figura 2.25:

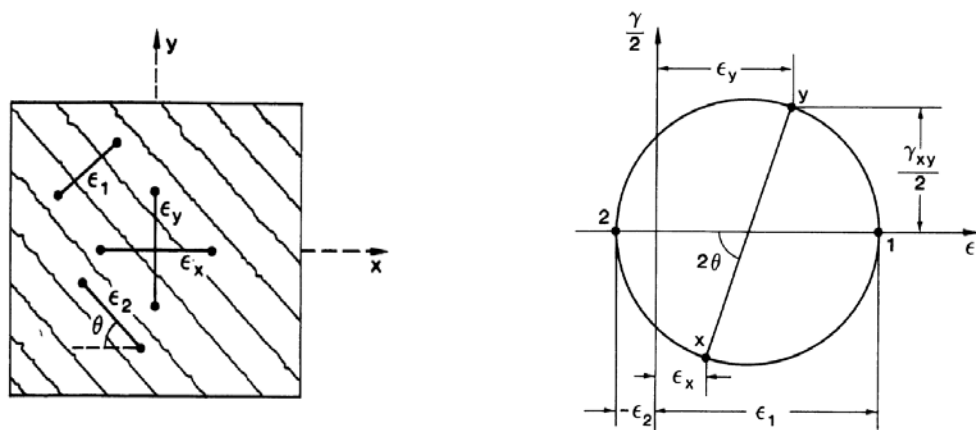


Figura 2.25: (Izq.) Deformaciones medias en el hormigón fisurado, (Der.) Círculo de Mohr para deformaciones medias [23].

De aquí se obtienen las siguientes relaciones:

$$\gamma_{xy} = \frac{2(\epsilon_x - \epsilon_2)}{\tan \theta} \quad (2.42)$$

$$\epsilon_x + \epsilon_y = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (2.43)$$

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_y - \varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_y}{\varepsilon_1 - \varepsilon_x} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_y}{\varepsilon_y - \varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_x} \quad (2.44)$$

donde  $\varepsilon_1$  es la tensión principal de tracción y  $\varepsilon_2$  es la tensión principal de compresión.

CONDICIONES DE EQUILIBRIO:

Las fuerzas aplicadas sobre el elemento de hormigón armado son resistidas por tensiones en el hormigón y tensiones en el armado. Según del diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 2.26:

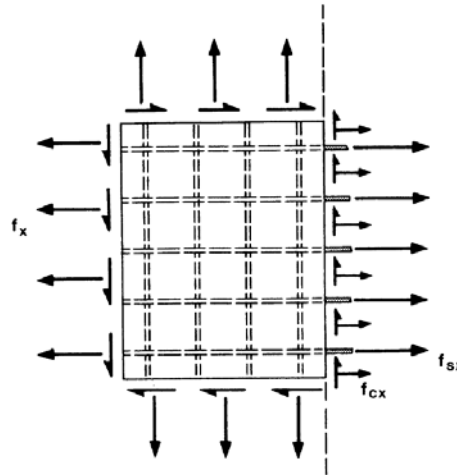


Figura 2.26: Diagrama de cuerpo libre de parte del elemento [23].

El requisito para el equilibrio para las fuerzas en dirección x se expresa como:

$$\int_A f_x dA = \int_{A_c} f_{cx} dA_c = \int_{A_s} f_{sx} dA_s \quad (2.45)$$

La ecuación (45) queda como:

$$f_x = f_{cx} + \rho_{sx} \cdot f_{sx} \quad (2.46)$$

Lo mismo con las demás:

$$f_y = f_{cy} + \rho_{sy} \cdot f_{sy} \quad (2.47)$$

$$v_{xy} = v_{cx} + \rho_{sx} \cdot v_{sx} \quad (2.48)$$

$$v_{xy} = v_{cy} + \rho_{sy} \cdot v_{sy} \quad (2.49)$$

Asumiendo que:

$$v_{cx} = v_{cy} = v_{cxy} \quad (2.50)$$

Las condiciones tensionales en el hormigón quedan totalmente conocidas si se conocen  $f_{cx}$ ,  $f_{cy}$  y  $v_{cxy}$ .

A partir del círculo de Mohr para tensiones que se muestra en la figura 2.27 se obtienen las siguientes relaciones:

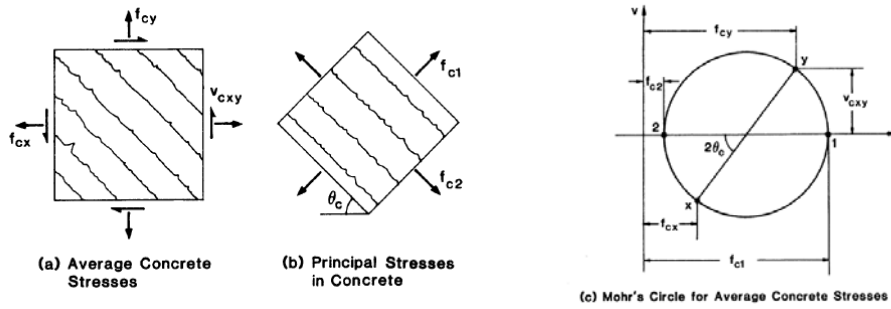


Figura 2.27: Tensiones en el hormigón fisurado: (a) tensiones medias en el hormigón, (b) tensiones principales en el hormigón, (c) círculo de Mohr para tensiones medias [23].

$$f_{cx} = f_{c1} - v_{cxy} / \tan \theta_c \quad (2.51)$$

$$f_{cy} = f_{c1} - v_{cxy} \cdot \tan \theta_c \quad (2.52)$$

$$f_{c2} = f_{c1} - v_{cxy} \cdot (\tan \theta_c + 1 / \tan \theta_c) \quad (2.53)$$

RELACIONES TENSIÓN-DEFORMACIÓN:

La tensión axial en el armado sólo depende de la deformación axial del armado. Se asume, además, que la tensión tangencial media en el plano normal al armado resistida por el armado es cero. Para la relación tensión axial con deformación axial, se adopta el diagrama bilineal de la figura 2.28:

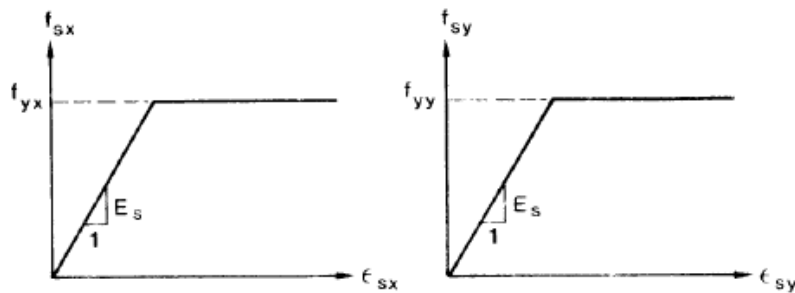


Figura 2.28: Relación tensión-deformación para el armado [23].

De este modo:

$$f_{sx} = E_s \cdot \varepsilon_x \leq f_{yx} \quad (2.54)$$

$$f_{sy} = E_s \cdot \varepsilon_y \leq f_{yy} \quad (2.55)$$

$$v_{sx} = v_{sy} = 0 \quad (2.56)$$

Con respecto al hormigón, se asume que los ejes principales de tensión y los ejes principales de deformación coinciden:

$$\theta_c = \theta \quad (2.57)$$

Para completar el modelo, se necesitan establecer las relaciones entre la tensión principal a compresión y la deformación principal a compresión y entre la tensión principal a tracción y la deformación principal a tracción.

Para obtener la información necesaria para completar el modelo se realiza un programa experimental que consta de 30 paneles de hormigón armado. Algunos de estos elementos se cargan a cortante puro, otros a compresión uniaxial, otros a la combinación de compresión biaxial y cortante, otros a tensión biaxial y cortante, otros a cortante cíclico y otros a cambios de ratios de carga. La disposición de los paneles para la realización del ensayo es la que se muestra en la figura 2.1 de este mismo documento.

#### COMPORTAMIENTO TENSIÓN MEDIA-DEFORMACIÓN MEDIA DEL HORMIGÓN:

Las direcciones de la deformaciones principales se encuentran con cierta desviación respecto a las direcciones de las tensiones principales en el hormigón. No obstante, se asume como simplificación razonable el considerarlas ambas en la misma dirección.

La tensión principal de compresión en el hormigón  $f_{c2}$  se considera en función, no sólo de la deformación principal de compresión  $\varepsilon_2$ , sino también de la deformación principal de tracción  $\varepsilon_1$  coexistente. De este modo se obtiene la relación:

$$f_{c2} = f_{c2max} \cdot \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_c} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right] \quad (2.58.a)$$

donde:

$$\frac{f_{c2max}}{f'_c} = \frac{1}{0.8 - 0.34 \cdot \varepsilon_1 / \varepsilon'_c} \leq 1.0 \quad (2.58.b)$$

Notar que  $\varepsilon'_c$  es una cantidad negativa (normalmente -0.002). Además, incrementando  $\varepsilon_1$  se reduce  $f_{c2max}/f'_c$ .

La relación entre la tensión principal a tracción media en el hormigón y la deformación principal a tracción media es más o menos lineal antes de la fisuración y, después, muestra valores en decrecimiento de  $f_{c1}$  con incrementos de los valores de  $\varepsilon_1$ . La relación sugerida antes de la fisuración ( $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_{cr}$ ) es:

$$f_{c1} = E_c \cdot \varepsilon_1 \quad (2.59)$$

donde  $E_c$  es el módulo de elasticidad del hormigón que puede tomarse como  $2f'_c/\varepsilon'_c$ . La relación sugerida después de la fisuración ( $\varepsilon_1 > \varepsilon_{cr}$ ) es:

$$f_{c1} = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{200} \varepsilon_1} \quad (2.60)$$

#### TRANSMISIÓN DE CARGAS A TRAVÉS DE LAS FISURAS

En las fisuras las tensiones de tracción en el armado son superiores a la media, mientras que la tensión entre fisuras es inferior a la media. Por otra parte, las tensiones de tracción en el

hormigón son cero en las fisuras y superiores a la media entre las fisuras. Estas variaciones locales son importantes porque la capacidad última del elemento sometido a tensiones biaxiales es gobernada por la habilidad del armado para transmitir las tracciones a través de las fisuras.

La figura 2.29 compara las tensiones medias calculadas (plano 1) con las tensiones locales actuales que ocurren en la fisura (plano 2). Se asume que la dirección crítica de la fisura es normal a la dirección principal de la deformación de tracción. Mientras la tensión tangencial media calculada es cero en el plano 1 (se trata de un plano principal en términos de tensiones medias), pueden haber tensiones tangenciales locales en el plano 2. Estas tensiones tangenciales  $v_{ci}$ , pueden ir acompañadas por pequeñas tensiones de compresión  $f_{ci}$ , a través de la fisura.

Como las tensiones externas aplicadas  $f_x$ ,  $f_y$  y  $v_{xy}$  son fijas, los dos tipos de tensiones que se muestran en la figura 2.29 son estáticamente equivalentes. Si se asume un área unitaria para los dos planos: plano 1 y plano 2, la expresión que se obtiene al producir los dos tipos de tensiones la misma fuerza en la dirección x es:

$$\rho_{sx} f_{sx} \sin \theta + f_{ci} \sin \theta = \rho_{sx} f_{sxcr} \sin \theta - f_{ci} \sin \theta - v_{ci} \cos \theta \quad (2.61)$$

La expresión que se obtiene al producir los dos tipos de tensiones en el plano 1 la misma fuerza en la dirección y es:

$$\rho_{sy} f_{sy} \cos \theta + f_{c1} \cos \theta = \rho_{sy} f_{syocr} \cos \theta - f_{ci} \cos \theta + v_{ci} \sin \theta \quad (2.62)$$

La expresión (62) se puede reordenar como:

$$\rho_{sy} (f_{syocr} - f_{sy}) = f_{c1} + f_{ci} - v_{ci} \tan \theta \quad (2.63)$$

Mientras que la expresión (61) se puede reordenar como:

$$\rho_{sx} (f_{sxocr} - f_{sx}) = f_{c1} + f_{ci} + v_{ci} / \tan \theta \quad (2.64)$$

El equilibrio entre la ecuación (63) y la ecuación (64) se satisface sin tensión tangencial en la fisura y sin tensiones de compresión en la fisura sólo si:

$$\rho_{sy} (f_{syocr} - f_{sy}) = \rho_{sx} (f_{sxocr} - f_{sx}) = f_{c1} \quad (2.65)$$

No obstante, la tensión de la armadura en la fisura no puede superar el límite elástico:

$$f_{sxocr} \leq f_{yx} \quad (2.66)$$

y:

$$f_{syocr} \leq f_{yy} \quad (2.67)$$

Así que, si las tensiones medias calculadas en cada armado son altas, no es posible satisfacer la ecuación (65). En este caso, el equilibrio requiere tensiones tangenciales en la fisura.

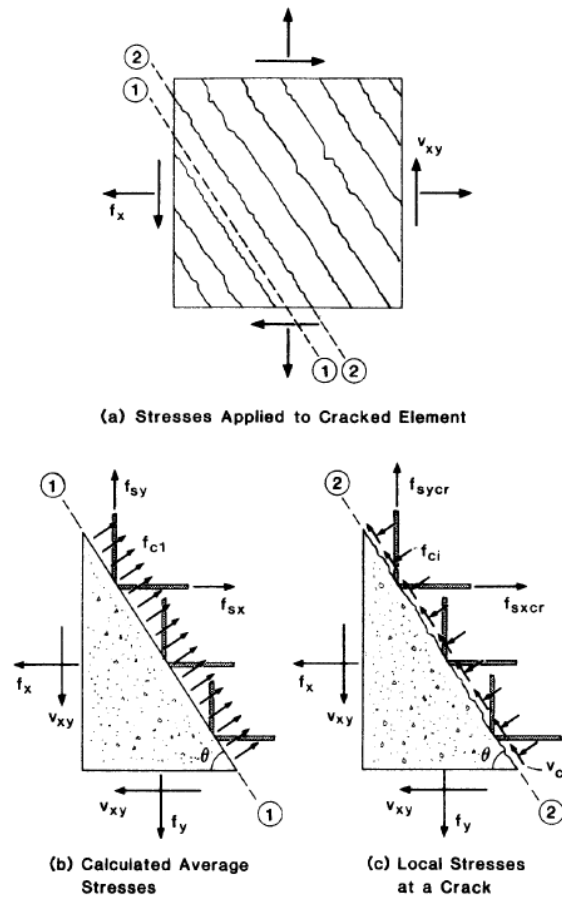


Figura 2.29: Comparación de tensiones locales en la fisura con tensiones medias calculadas [23].

Para la mayoría de los hormigones, la fisuración suele ocurrir a lo largo de la interface entre la pasta de cemento y las partículas del árido. Las fisuras rugosas resultantes pueden transmitir el cortante por el mecanismo de engranamiento de áridos (ver figura 2.30).

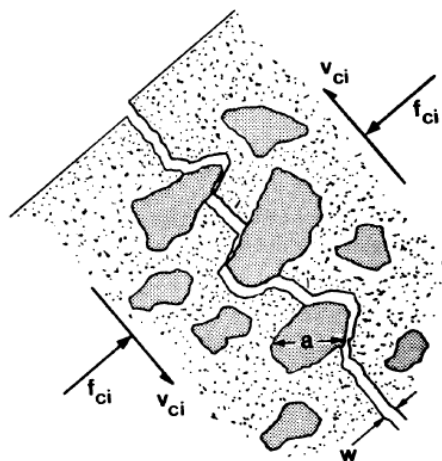


Figura 2.30: Transmisión de las tensiones tangenciales por medio del mecanismo de engranamiento de áridos [23].



La relación entre la tensión tangencial a través de la fisura  $v_{ci}$ , la anchura de la fisura  $w$ , y la tensión de compresión requerida en la fisura  $f_{ci}$  ha sido estudiada de forma experimental por numerosos investigadores como Walraven [22]. Basado en el trabajo de Walraven, se obtiene la siguiente relación (ver figura 2.31):

$$v_{ci} = 0.18v_{cim\max} + 1.64f_{ci} - 0.82 \frac{f_{ci}^2}{v_{cim\max}} \quad (2.68)$$

donde:

$$v_{cim\max} = \frac{\sqrt{-f'_c}}{0.31+24w/(a+16)} \quad (2.69)$$

y donde  $a$  es el tamaño máximo del árido en milímetros y las tensiones están en MPa.

El ancho de la fisura  $w$  que se usa en la expresión (69) es la media de los anchos de fisura en la superficie de la fisura. Se puede calcular como el producto de la deformación principal de tracción media y la separación de la fisura:

$$w = \varepsilon_1 \cdot s_\theta \quad (2.70)$$

donde:

$$s_\theta = \frac{1}{\frac{\sin \theta \cos \theta}{s_{mx} + s_{my}}} \quad (2.71)$$

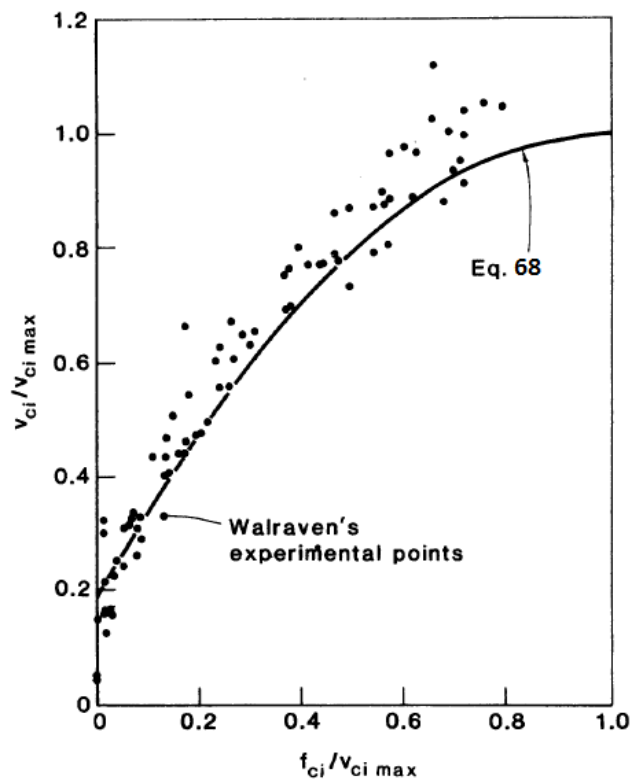


Figura 2.31: Relación entre el cortante transmitido a través de la fisura y la tensión de compresión en la fisura [23].

donde  $s_{mx}$  y  $s_{my}$  son los indicadores de las características de control de la fisura del armado en x y del armado en y respectivamente.

#### TÉCNICA DE SOLUCIÓN

Dadas las deformaciones en un elemento de hormigón armado, es razonablemente directo el procedimiento para el cálculo de las tensiones que causan estas deformaciones. La única iteración que se requiere es la que envuelve la obtención de  $f_{ci}$  si el armado no es capaz de transmitir la tracción en el hormigón a través de las fisuras.

La obtención de las deformaciones del elemento, dadas las tensiones, resulta de mayor dificultad debido a que se necesita una solución a partir de prueba y error. En el apéndice de este artículo se presenta un procedimiento computacional para determinar la respuesta de un elemento cargado de forma biaxial.

#### CONCLUSIONES

De este artículo se concluye que "The Modified Compression-Field Theory" es capaz de predecir la respuesta de elementos de hormigón armado frente a tensiones tangenciales y axiales en el plano considerando condiciones de equilibrio, relaciones de compatibilidad y relaciones tensión-deformación (relaciones constitutivas), todas expresadas en términos de tensiones medias y deformaciones medias. También se debe tener en cuenta las condiciones de tensión locales en la posición de la fisura. Además, se incorporan nuevas relaciones constitutivas verificadas de forma matemática y experimental para hormigón fisurado en la respuesta tensional a compresión principal y para la respuesta a tracción principal. La teoría se resume en la figura 2.32.

"The Modified Compression-Field Theory" es una poderosa herramienta analítica y, además, es suficientemente simple para ser programada sin dificultad. No sólo se usa para predecir la respuesta biaxial de paneles sino también se usa para predecir la respuesta de vigas sometidas a cortante, flexión y cargas axiales. También se usa como base para los programas de análisis no lineal por elementos finitos.

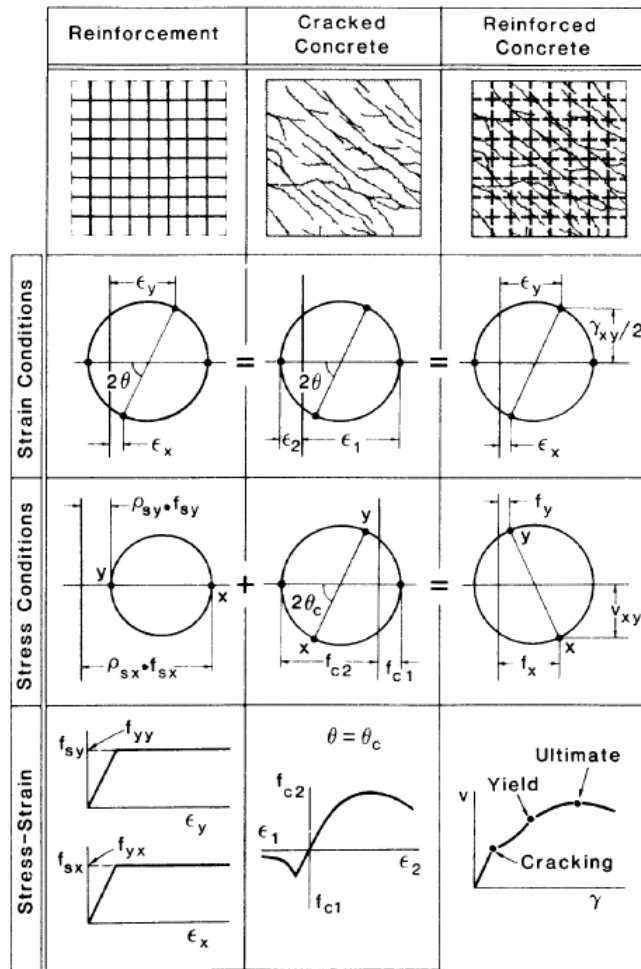


Figura 2.32: "The Modified Compression-Field Theory" para elementos membrana [23].

Además, este artículo remarca las dos primeras conclusiones del apartado 2.4.5 de este mismo documento y las conclusiones del apartado 2.4.6 de este mismo documento.

### 2.4.8. THOMAS T.C. HSU, S.T. MAU, and BIN CHEN (1987) [6].

A través de distintas observaciones experimentales se establece que hay, básicamente, dos tipos de comportamiento en los problemas de transmisión de cortante a través de un plano de corte: transferencia del cortante a través de un plano de corte inicialmente fisurado, y transferencia del cortante a través del plano de corte sin fisuración previa. El comportamiento en el primer caso viene gobernado, en gran parte, por las características de deslizamiento frente al plano de corte inicialmente fisurado. El efecto de engranamiento de áridos (tal y como se dice en el apartado 2.4.5 [22] de este mismo documento), el efecto pasador de las armaduras y las constricciones en la dirección normal al plano de corte afectan a la resistencia a cortante. El fallo final se produce a lo largo de la fisura existente (ver figura 2.3 (a)) con pequeñas o inexistentes fisuras formadas a través de la fisura preexistente, exceptuando los casos con alto porcentaje de acero cruzando la fisura inicial. Para el diseño, la resistencia a cortante se predice usando una formulación empírica basada en la teoría del "shear friction", que ya se describió en el apartado 2.4.1 de este documento [16, 17].

Por el contrario, el fallo por cortante a través del plano de corte sin fisuración previa ocurre tras la formación de numerosas fisuras en dirección inclinada con respecto al plano de corte (ver figura 2.3 (b)). El fallo final se produce, normalmente, debido al aplastamiento de la biela de compresión del hormigón formada aproximadamente paralela a la dirección de las fisuras. La compresión en las bielas de hormigón y la tensión que se produce en el armado situado a través y paralelamente al plano de corte, constituyen un mecanismo de celosía, tal y como ya se explicó en el apartado 2.4.2 de este mismo documento [5].

La principal dificultad a la hora de predecir la resistencia a corte del hormigón no fisurado inicialmente se encuentra en la incertidumbre de la resistencia a compresión que tiene la biela. En el estudio del comportamiento de paneles de hormigón armado bajo tensiones predominantes de corte, se descubrió que la resistencia a compresión de las bielas diagonales de compresión formadas después de la fisuración del hormigón puede ser inferior a la resistencia estándar del cilindro. Este fenómeno se conoce como reblandecimiento del hormigón ("softening of concrete"). Este reblandecimiento del hormigón está relacionado con la deformación a tracción en la dirección perpendicular a las bielas.

En este estudio, la "Teoría del modelo de celosía con reblandecimiento", tiene éxito en la predicción de la resistencia a corte en piezas sin fisuración previa. De este modo, la teoría predice que el fallo último se produce por el aplastamiento del hormigón en las bielas de compresión formadas después de la fisuración del hormigón. Además, el armado transversal, paralelo a las bielas, y situado en las inmediaciones del plano de corte, produce un efecto en la resistencia a tracción.

Para ello se desarrolla un modelo matemático que se describe a continuación. En él se consideran positivas las tracciones y tanto tensiones como deformaciones a tracción se consideran uniformemente distribuidas.

#### CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Se considera un elemento de hormigón armado con barras longitudinales en la dirección  $l$  y barras transversales en la dirección  $t$ , tal y como se muestra en la figura 2.33. A partir de estos ejes, se definen las tensiones  $\sigma_l$ ,  $\sigma_t$  y  $\tau_{lt}$ . Después de la fisuración diagonal, se forman una serie de bielas de compresión en la dirección diagonal o  $d$ , resultando la formación de un mecanismo de celosía. Se asume que el elemento sólo está sometido a tensiones de compresión  $\sigma_d$  en la dirección de las bielas de compresión, y tensiones de tracción  $\sigma_r$  en la dirección  $r$  transversal a las bielas de compresión. La tensión tangencial  $\tau_{dr}$  se asume como cero. Se forma un ángulo  $\alpha$  entre los sistemas  $l-t$  y  $d-r$ . Este ángulo es también el ángulo de inclinación entre las bielas de compresión y el eje longitudinal.

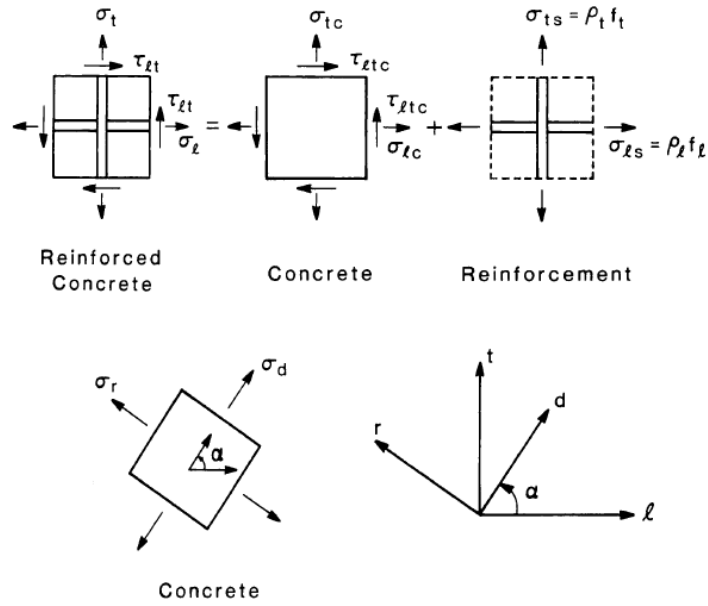


Figura 2.33: Modelo de celosía para un elemento de hormigón armado [6].

Las tensiones  $\sigma_l$ ,  $\sigma_t$  y  $\tau_{lt}$  en el elemento de hormigón armado son resistidas conjuntamente por el hormigón y el acero del armado. Las tensiones resistidas por el hormigón se designan  $\sigma_{lc}$ ,  $\sigma_{tc}$  y  $\tau_{ltc}$ . A partir de aquí se obtienen las siguientes expresiones:

$$\sigma_{lc} = \sigma_d \cos^2 \alpha + \sigma_r \sin^2 \alpha \quad (2.72)$$

$$\sigma_{tc} = \sigma_d \sin^2 \alpha + \sigma_r \cos^2 \alpha \quad (2.73)$$

$$\tau_{ltc} = (\sigma_d - \sigma_r) \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.74)$$

Estas expresiones satisfacen las condiciones del Círculo de Mohr en tensiones.

Se asume que el acero del armado contribuye sólo en las tensiones normales:

$$\sigma_{ls} = \rho_l f_l \quad (2.75)$$

$$\sigma_{ts} = \rho_t f_t \quad (2.76)$$

donde:  $\sigma_{ls}$ ,  $\sigma_{ts}$  = tensiones normales en el acero en dirección  $l$  y  $t$  respectivamente.

$\rho_l$ ,  $\rho_t$  = densidad de armado en dirección  $l$  y  $t$  respectivamente.

$f_l$ ,  $f_t$  = tensión en el armado en dirección  $l$  y  $t$  respectivamente.

La tensión total en un elemento de hormigón armado es la superposición de las tensiones en el hormigón y la contribución del acero. De este modo se obtiene:

$$\sigma_l = \sigma_d \cos^2 \alpha + \sigma_r \sin^2 \alpha + \rho_l f_l \quad (2.77)$$

$$\sigma_t = \sigma_d \sin^2 \alpha + \sigma_r \cos^2 \alpha + \rho_t f_t \quad (2.78)$$

$$\tau_{lt} = (\sigma_d - \sigma_r) \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.79)$$

#### CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD

Asumiendo que las deformaciones se distribuyen de manera uniforme en el elemento, entonces:

$$\varepsilon_l = \varepsilon_d \cos^2 \alpha + \varepsilon_r \sin^2 \alpha \quad (2.80)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_d \sin^2 \alpha + \varepsilon_r \cos^2 \alpha \quad (2.81)$$

$$\gamma_{lt} = 2(\varepsilon_d - \varepsilon_r) \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.82)$$

donde:  $\varepsilon_l, \varepsilon_t$  = deformaciones normales en el acero en dirección  $l$  y  $t$  respectivamente.

$\gamma_{lt}$  = distorsión angular en el sistema  $l - t$ .

$\varepsilon_d, \varepsilon_r$  = deformaciones normales en el sistema  $d-r$  (deformaciones principales).

Estas expresiones satisfacen las condiciones del Círculo de Mohr en deformaciones.

#### ECUACIONES CONSTITUTIVAS (RELACIONES TENSIÓN-DEFORMACIÓN)

Las relaciones tensión-deformación que se utilizan en este artículo son las relaciones tensión-deformación deducidas por Vecchio y Collins en el apartado 2.4.6 de este mismo documento [3] y se muestran en la figura 2.34 (a):

Si  $|\varepsilon_d| \leq |\varepsilon_p|$ :

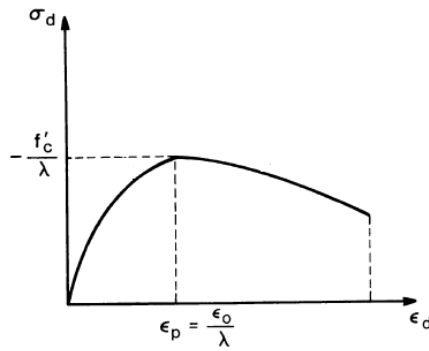
$$\sigma_d = -f'_c \cdot \left[ 2 \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} - \lambda \left( \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (2.83a)$$

Si  $|\varepsilon_d| > |\varepsilon_p|$ :

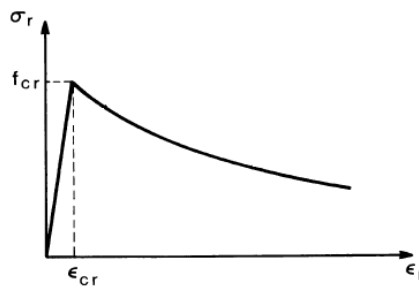
$$\sigma_d = \frac{-f'_c}{\lambda} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_d/\varepsilon_0 - 1/\lambda}{2 - 1/\lambda} \right)^2 \right] \quad (2.83b)$$

donde  $\varepsilon_p = \varepsilon_0/\lambda$  se define como la deformación pico, siendo  $\varepsilon_0 = -0.002$ .  $\lambda$  es un coeficiente para tener en cuenta el fenómeno de reblandecimiento y se expresa como:

$$\lambda = \sqrt{-\frac{\varepsilon_l + \varepsilon_t - 2\varepsilon_d}{\varepsilon_d} - 0.3} = \sqrt{0.7 - \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_d}} \quad (2.84)$$



(a) Compression Stress-Strain Relationship



(b) Tension Stress-Strain Relationship

Figura 2.34: Relaciones tensión-deformación con reblandecimiento para el hormigón [6].

La relación tensión-deformación en la dirección perpendicular a la biela de compresión se muestra en la figura 2.34 (b). Antes de que el hormigón fisure, la relación lineal ascendente viene expresada como:

si  $\epsilon_r < \epsilon_{cr}$

$$\sigma_r = E_c \epsilon_r \tag{2.85a}$$

donde  $E_c$  = modulo de elasticidad inicial del hormigón tomado como  $-2f_c / \epsilon_0$

Para la rama de descenso después de fisurar se asume la relación:

si  $\epsilon_r > \epsilon_{cr}$

$$\sigma_r = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon_r - \epsilon_{cr}}{0.005}}} \tag{2.85b}$$

donde  $f_{cr}$  = tensión de fisuración del hormigón, tomada como  $4(f'_c)^{1/2}$  y  $\epsilon_{cr}$  = deformación de fisuración del hormigón =  $f_c / E_c$ . Esta relación no es exactamente la misma que la que se describe en [3]. En [3] el término en la raíz cuadrada en el numerado es  $\epsilon_r$  en lugar de  $\epsilon_r - \epsilon_{cr}$  (ver expresión (28) de este mismo documento). Esta corrección hace que el resultado de la expresión (85b) sea consistente con la condición  $\sigma_r = f_{cr}$  cuando  $\epsilon_r = \epsilon_{cr}$ . El efecto de esta modificación es menor ya que  $\epsilon_{cr}$  normalmente es mucho menor que  $\epsilon_r$ .

$$f_l = E_s \epsilon_l \quad \text{si } \epsilon_l \leq \epsilon_{ly} \tag{2.86a}$$

$$f_l = f_{ly} \quad \text{si } \varepsilon_l > \varepsilon_{ly} \quad (2.86b)$$

$$f_t = E_s \varepsilon_t \quad \text{si } \varepsilon_t \leq \varepsilon_{ty} \quad (2.87a)$$

$$f_t = f_{ty} \quad \text{si } \varepsilon_t > \varepsilon_{ty} \quad (2.87b)$$

donde  $E_s$  = módulo de Young de elasticidad del armado.  $f_{ly}$ ,  $f_{ty}$  = tensiones de plastificación del armado longitudinal y transversal, respectivamente.

#### CONDENSACIÓN DE LAS ECUACIONES Y PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN

Las tensiones  $\sigma_t$  y  $\tau_{lt}$  se relacionan con la carga externa aplicada del siguiente modo:

$$\sigma_t = K_\sigma \frac{P_t}{bh} \quad (2.88)$$

$$\tau_{lt} = K_\tau \frac{P_t}{bl} \quad (2.89)$$

donde:  $K_\sigma$  = coeficiente que describe la distribución no uniforme de la tensión  $\sigma_t$ .

$K_\tau$  = coeficiente que describe la distribución no uniforme de la tensión  $\tau_{lt}$ .

$b$  = grosor de la probeta (figura 2.35)

$h$  = ancho de la probeta (figura 2.35)

$l$  = longitud del plano de corte (figura 2.35)

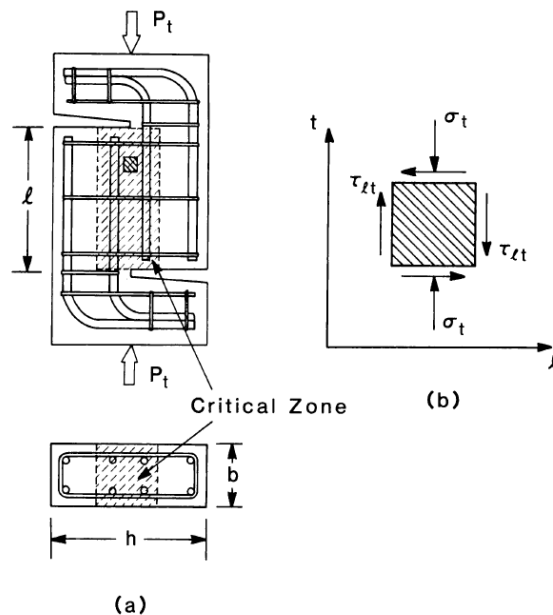


Figura 2.35: Probetas tipo push-off y zona crítica [6].

Eliminando  $P_t$  de las ecuaciones (2.88) y (2.89) se llega a:



$$\sigma_t = \left(\frac{l K_\sigma}{h K_\tau}\right) \tau_{lt} \quad (2.89)$$

$$K = \frac{l K_\sigma}{h K_\tau} \quad (2.90)$$

$$\sigma_t = K \tau_{lt} \quad (2.91)$$

Sustituyendo la ecuación (2.86) en la ecuación (2.77) y usando la ecuación (2.80) para  $\varepsilon_i$ :

$$\sigma_l = \sigma_d \cos^2 \alpha + \sigma_r \sin^2 \alpha + \rho_l f_{ly} \quad \varepsilon_l \geq \varepsilon_{ly} \quad (2.92a)$$

$$\sigma_l = \sigma_d \cos^2 \alpha + \sigma_r \sin^2 \alpha + \rho_l E_s (\varepsilon_d \cos^2 \alpha + \varepsilon_r \sin^2 \alpha) \quad \varepsilon_l < \varepsilon_{ly} \quad (2.92b)$$

De las ecuaciones (2.78), (2.79) y (2.91) se obtiene:

$$(\sigma_d - \sigma_r) K \sin \alpha \cos \alpha = \sigma_d \sin^2 \alpha + \sigma_r \cos^2 \alpha + \rho_t f_t \quad (2.93)$$

Sustituyendo la ecuación (2.87) en la ecuación (2.93) y usando la ecuación (2.81) para  $\varepsilon_i$ :

$$(\sigma_d - \sigma_r) K \sin \alpha \cos \alpha = \sigma_d \sin^2 \alpha + \sigma_r \cos^2 \alpha + \rho_t f_{ty} \quad \varepsilon_t \geq \varepsilon_{ty} \quad (2.94a)$$

$$(\sigma_d - \sigma_r) K \sin \alpha \cos \alpha = \sigma_d \sin^2 \alpha + \sigma_r \cos^2 \alpha + \rho_t E_s (\varepsilon_d \sin^2 \alpha + \varepsilon_r \cos^2 \alpha) \quad \varepsilon_t < \varepsilon_{ty} \quad (2.94b)$$

El procedimiento iterativo que se sigue para la resolución es el siguiente:

1. Seleccionar un valor para  $\varepsilon_d$ .
2. Asumir un valor de  $\sigma_r$ .
3. Resolver  $\varepsilon_r$  a partir de las curvas tensión-deformación de las expresiones (2.85):

$$\varepsilon_r = \left[ 0.005 \left( \frac{f_{cr}}{\sigma_r} - 1 \right)^2 + \varepsilon_{cr} \right] \quad \varepsilon_r \geq \varepsilon_{cr}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_c} \quad \varepsilon_r < \varepsilon_{cr}$$

4. Hallar  $\lambda$  a partir de la expresión (84):

$$\lambda = \sqrt{0.7 - \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_d}}$$

5. Hallar  $\sigma_d$  de la expresión (2.83):

Si  $|\varepsilon_d| \leq |\varepsilon_p|$ :

$$\sigma_d = -f'_c \cdot \left[ 2 \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} - \lambda \left( \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]$$

Si  $|\varepsilon_d| > |\varepsilon_p|$ :

$$\sigma_d = \frac{-f'_c}{\lambda} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_d/\varepsilon_0 - 1/\lambda}{2 - 1/\lambda} \right)^2 \right]$$

6. Obtener  $\alpha$  a partir de las expresiones (2.92):

$$\cos^2 \alpha = \frac{\sigma_l - \sigma_r - \rho_l f_{ly}}{\sigma_d - \sigma_r} \quad \varepsilon_l \geq \varepsilon_{ly}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\sigma_l - \sigma_r - \rho_l E_s \varepsilon_r}{\sigma_d - \sigma_r + \rho_l E_s (\varepsilon_d - \varepsilon_r)} \quad \varepsilon_l < \varepsilon_{ly}$$

y, con ello, obtener  $\sin^2 \alpha$ ,  $\sin \alpha$  y  $\cos \alpha$ .

7. Resolver  $\sigma_r$  a partir de las expresiones (2.94):

$$\sigma_r = \frac{\sigma_d (K \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha) - \rho_t f_{ty}}{K \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha} \quad \varepsilon_t \geq \varepsilon_{ty}$$

$$\sigma_r = \frac{\frac{\sigma_d (K \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha)}{-\rho_t E_s (\varepsilon_d \sin^2 \alpha + \varepsilon_r \cos^2 \alpha)}}{K \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha} \quad \varepsilon_t < \varepsilon_{ty}$$

8. Si el valor de  $\sigma_r$  calculado es suficientemente próximo al valor de  $\sigma_r$  asumido, entonces se han obtenido un conjunto de soluciones  $\sigma_d$ ,  $\sigma_r$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\alpha$  y  $\lambda$  para el valor seleccionado de  $\varepsilon_d$ . Si esto no es así, se calcula otro  $\sigma_r$  por el método de la bisección y se repiten los pasos 2 y 7.

9. Se selecciona otro valor de  $\varepsilon_d$  y se repiten todos los pasos desde el paso 1 al 8. En este proceso, se puede hallar un conjunto de soluciones para varios  $\varepsilon_d$ .

10. El valor de  $\tau_{lt}$ ,  $\varepsilon_l$ ,  $\varepsilon_t$ ,  $\gamma_{lt}$ ,  $f_l$  y  $f_t$  se puede obtener a partir de las expresiones (2.79), (2.80), (2.81), (2.82), (2.86) y (2.87), respectivamente.

Con ello se consiguen unos resultados que se comparan con 32 test de laboratorio (ensayos *push-off* y *pull-off*) provenientes de la literatura [5].

## CONCLUSIONES

Se obtiene una buena concordancia de resultados entre la resistencia a cortante calculada y la obtenida mediante ensayos en los casos donde la distribución de tensiones en la zona crítica, abarcando el plano de corte, es razonablemente uniforme después de la fisuración del hormigón. Se muestra que la resistencia a corte que se obtiene no es sensible a la distribución de la tensión de compresión aplicada en la dirección transversal, ni a la cantidad de armado transversal de la probeta si se usan grandes cantidades de armado transversal. Si que se puede ver reducida la resistencia a corte con piezas con cantidades de armadura transversal reducidas. Esto coincide con lo aportado en el apartado 2.4.2 de este documento [5].

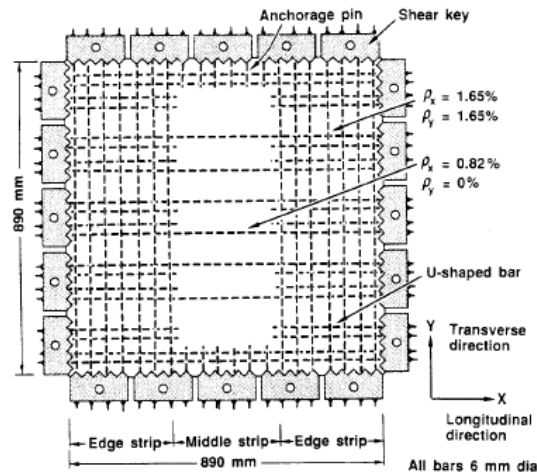
El reblandecimiento del hormigón después de su fisuración juega un papel importante en la determinación de la resistencia a cortante. Tanto el armado en dirección longitudinal al plano de cortante como el armado en dirección transversal son factores importantes en la determinación del grado de reblandecimiento del hormigón y, por tanto, contribuyen a la resistencia a cortante en el plano de corte. La influencia es mucho mayor en el caso del armado longitudinal.

### 2.4.9. F.J. VECCHIO and M. NIETO (1991) [26].

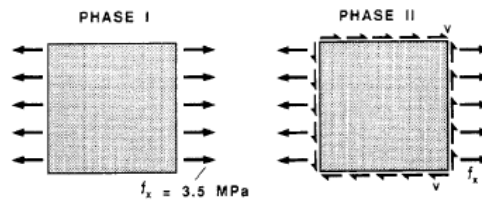
Este artículo trata de una investigación de tipo experimental y una posterior modelización mediante el método de elementos finitos.

#### PROGRAMA EXPERIMENTAL

El programa experimental que se lleva a cabo en este artículo está compuesto por seis paneles de hormigón armado bajo varias condiciones de carga monotónica en el plano. Antes de proceder al ensayo, se inducen unas fisuras transversales en los paneles mediante la aplicación de cargas de tracción uniaxiales. Posteriormente los paneles se someten a varias combinaciones uniaxiales de tracción, compresión o cortante. El interés del ensayo se pone en la respuesta a cortante de los paneles en la región prefisurada y uniaxialmente armada (ver figura 2.36).



(a) Specimen Details



Panel No.	Phase I Loading	Phase II Loading ( v : f <sub>x</sub> : f <sub>y</sub> )
PN1	No	1 : 0 : 0
PN2	Yes	1 : 0 : 0
PN3	Yes	1 : 0.5 : 0
PN4	Yes	1 : 1.0 : 0
PN5	Yes	1 : -0.5 : 0
PN6	Yes	1 : -1.0 : 0

(b) Loading Conditions

Figura 2.36: Detalle de los paneles para el ensayo [26].

El resultado del programa experimental indica que el comportamiento del panel a corte no se ve influenciado de manera significativa por las fisuras transversales preexistentes. Parece ser que las fuerzas de corte actuando a través de la longitud de la franja media del panel son

resistidas, en un primer momento, por un mecanismo de celosía (coincidiendo con lo ya tratado en apartados anteriores de este mismo documento, apartados 2.4.2 y 2.4.8 [5] y [6]).

Es significativa la influencia de las tensiones longitudinales en la capacidad de resistencia a corte de los paneles. Donde el fallo viene gobernado por la plastificación de las armaduras, las tensiones longitudinales externas aplicadas tienen una influencia directa sobre la resistencia a corte. Las tensiones de tracción reducen la capacidad de resistencia al corte del armado, mientras que las tensiones de compresión la aumentan.

Las zonas con alto contenido en armado de los paneles tienen también una gran influencia en la resistencia al corte. Se produce un efecto de confinamiento que impide la expansión en la dirección transversal. Ello produce un aumento de la capacidad resistente a corte (no parece concordar demasiado con lo dicho en el apartado anterior, apartado 2.4.8).

También se realiza una comparación con el "shear friction model" [16, 17] y en el apartado 2.4.1 de este mismo documento [15]). En esta comparación se observa que el "shear friction model" da predicciones muy conservativas en cortante puro o en la combinación entre cortante y tracción longitudinal (como ya se ha dicho en los apartados 2.4.1 y 2.4.2 mencionados en este mismo documento). No obstante, las resistencias obtenidas por el "shear friction model" son menos conservativas para paneles cargados con cortante y compresión longitudinal. Esto es debido a que este modelo se basa en la suposición de que la plastificación del acero del armado gobierna el fallo final. Por tanto, la fisuración del hormigón que conduce al fallo, como ocurre en el caso de los paneles cargados a compresión y a corte, no son considerados.

#### MODELIZACIÓN DE LA RESPUESTA TEÓRICA

Para la obtención de las respuestas de los paneles de modo teórico se usa un análisis no lineal mediante el método de los elementos finitos. Para ello se usa el programa "TRIX" el cual incorpora los conceptos y ecuaciones constitutivas del "Modified Compression Field Theory" ya explicado en el apartado 2.4.7 de este mismo documento [23]. El algoritmo que se usa para la modelización mediante elementos finitos se basa en un modelo de fisura extendido (difuso) y rotativo, empleando un procedimiento de rigidez secante con carga total. En la figura 2.37 se puede observar la malla que se usa.

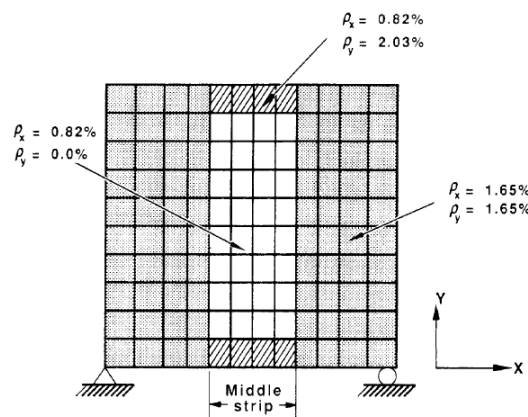


Figura 2.37: Modelo de elementos finitos para los paneles [26].

El análisis indica que el mecanismo de resistencia que se desarrolla en los paneles está compuesto por bielas de compresión que se forman en la región media entre las dos regiones con mayor rigidez del panel. La acción de las bielas es dominante a lo largo de una banda a través del centro del panel, siendo las regiones laterales de la banda central relativamente inefectivas. El análisis muestra, además, que dichas regiones laterales con mayor rigidez producen un efecto de confinamiento que restringe la expansión transversal en el centro de la región. Esta compresión transversal inducida en la franja central conduce al desarrollo de resistencias significativamente elevadas en comparación con las que se obtendrían con paneles uniaxialmente armados.

Se consigue una buena predicción de la respuesta carga-deformación post-fisura y en la ductilidad en la carga última. La rigidez inicial se sobreestima debido, parcialmente a la negligencia de las fisuras transversales preexistentes. El modo de fallo que se predice envuelve un fallo por cortante del hormigón tras la plastificación del armado logitudinal.

Para la obtención de otra medida de precisión también se analizan mediante el modelo de elementos finitos con el MCFT el comportamiento a cortante de las probetas de *push-off* con fisuración previa obtenidas de la literatura [15] y ya tratadas en este documento (apartado 2.4.1). En la figura 2.38 se puede observar el modelo que se usa.

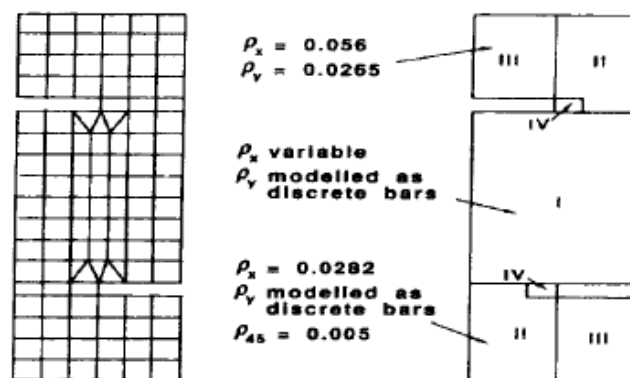


Figura 2.38: Modelo de elementos finitos para los *pus-off* con fisuración previa [26].

Las barras de armado longitudinal se modelan de forma discreta a modo de celosía, mientras que las barras transversales (por ejemplo, el armado que cruza el plano de corte) se modela de forma difusa. El análisis muestra que, para piezas con baja densidad de armado, el fallo viene gobernado por la plastificación del acero. Para piezas con mayor densidad de armado, el fallo viene propiciado por la fisuración del hormigón en la zona colindante con el plano de corte, como ya se menciona en los apartados 2.4.2 y 2.4.8 [5], [6] de este mismo documento. Con este modelo se obtiene una buena precisión de la resistencia al corte. La tendencia de subestimar la resistencia en las piezas con mayor cantidad de armado podría estar relacionada con la influencia del efecto pasador de las armaduras, el cual no se ha considerado en el modelo analítico.

Inicialmente se había modelado el armado longitudinal en los *push-off* de forma difusa. El área del armado longitudinal se había considerado igualmente distribuida a través de todo el ancho de la pieza y, debido a ello, las zonas adyacentes al plano de cortante se habían

representado como si estuviesen armados de forma ortogonal. Ello condujo a predicciones significativamente elevadas de la resistencia última, y alteró la formación de las fisuras y la distribución de tensiones. Por tanto, la advertencia es que, en estructuras donde el comportamiento está altamente influenciado por las condiciones de un plano de corte bien definido, es necesario tener especial cuidado en el modelado del armado en las regiones adyacentes al plano.

## CONCLUSIONES

Los paneles de hormigón armado se ensayan para investigar la aplicabilidad de la "Modified Compresion Field Theory" en situaciones distintas de lo que se asume como condiciones normales.

Las fisuras transversales preexistentes muestran una pequeña influencia en el comportamiento del panel. Es visible cierto deslizamiento, aunque la rigidez a cortante inicial se ve reducida y se observan pequeñas fisuras locales a lo largo de las interfaces de las fisuras diagonales. Las fuerzas de corte son resistidas, en un primer momento, por un mecanismo de celosía y, la rotura se produce o bien por rotura del armado o bien por aplastamiento de las bielas de compresión, como ya se sabe de los apartados 2.4.1 y 2.4.2 de este documento. La aplicación de tensiones externas también afecta a la resistencia a corte y a la respuesta carga-deformación.

La "Modified Compresion Field Theory" incorporada en un procedimiento de elementos finitos no lineal predice de forma precisa tanto la resistencia como la respuesta carga-deformación de los paneles. También predice con suficiente precisión la resistencia de probetas tipo *push-off* con fisuración previa. No obstante, en este último caso, se observa que la predicción de la resistencia es sensible a la modelización de las condiciones en la región cercana al plano de corte. Por ello, la aplicación de este modelo a situaciones donde existe una gran fisura individual o está cercana a su aparición, no es recomendable a no ser que tanto la fisura como las condiciones del armado se modelen de forma discreta. No obstante, en general, la "Modified Compresion Field Theory" parece razonablemente capaz de predecir la respuesta en casos un tanto desviados de las condiciones asumidas de fisuración distribuida (difusa) y armado distribuido.

Los paneles ensayados manifiestan resistencias considerablemente superiores que las de los paneles ensayados en un primer momento que fueron armados de forma uniaxial. Esto indica que la respuesta no lineal del hormigón armado puede dar lugar a redistribuciones de tensiones internas significativas.

### **2.4.10. F.J. VECCHIO (2000) [27].**

En este artículo se presenta un modelo conceptual para describir el comportamiento de elementos de hormigón armado y fisurado: el modelo *DSFM* ("*Disturbed Stress Field Model*"). Esto se lleva a cabo a través de una formulación híbrida entre el modelo de fisuración con rotación completa y el modelo de fisuración con rotación fija. La formulación que aquí se lleva a cabo parte del modelo *MCFT* [23], ya explicado en el apartado 2.4.7 de este capítulo. Aquí se trata el hormigón fisurado como un material ortotrópico, con una relación única tensión-

deformación, tanto en compresión como en tracción. Las mejoras en la formulación, con respecto al *MCFT*, incluyen una nueva aproximación a la reorientación de los campos de tensiones y deformaciones, cambiando la restricción según la cual estos campos eran coincidentes, y un tratamiento mejorado de las tensiones tangenciales producidas por el cortante en la superficie de las fisuras. Se formulan nuevas expresiones de equilibrio, compatibilidad y de constitución material. Además, también se discuten modelos de deslizamiento alternativos. Esta nueva teoría que se propone permite simulaciones mejoradas de la respuesta del material en situaciones específicas donde la formulación previa produce inexactitudes.

Éste es el modelo que se utiliza en el capítulo de modelización para el hormigón armado y el hormigón armado y con fibras de acero de este trabajo.

#### **2.4.11. F.J. VECCHIO (2001) [28].**

El modelo "*Disturbed Stress Field Model*" (*DSFM*) es un modelo de fisuración difusa, rotativo y con desfase entre el campo de tensiones y el de deformaciones, propuesto como una alternativa a los modelos de fisuración completamente rotativos y completamente fijos, para la representación del hormigón armado y fisurado. En este artículo se describe un procedimiento para implementar la formulación del modelo *DSFM* en un algoritmo de elementos finitos no lineal. El procedimiento se basa en una aproximación de carga total con rigidez secante, donde los desplazamientos por deslizamiento en las fisuras se tratan como deformaciones compensadas. Los aspectos computacionales se muestran simples y numéricamente robustos. La formulación híbrida del deslizamiento en la fisura que se usa modela con exactitud la divergencia entre la dirección de las tensiones y la de las deformaciones, dando lugar a una mejora en la representación del comportamiento.

Éste es el procedimiento que se utiliza en el capítulo de modelización para el hormigón armado y el hormigón armado y con fibras de acero de este trabajo.

#### **2.4.12. F.J. VECCHIO, D. LAI, W. SHIM, and J. NG (2001) [29].**

En este artículo se lleva a cabo la validación del modelo *DSFM* descrito en los dos puntos anteriores. Para ello se analizan 40 paneles de la literatura divididos en tres series (ver figuras 2.39 y 2.40): la serie PV- fue la ensayada por Vecchio y Collins (1982) basados, originalmente, en el modelo *MCFT*, la serie PB- fue la ensayada por Bhide y Collins (1989), las series PA- y PHS- fueron ensayadas por Vecchio et al. (1994). Todas las series se validan con los modelos *DSFM* y *MCFT*.

Panel	$f'_c$ (MPa)	$\rho_x$ (%)	$\rho_y$ (%)	Loading $\sigma_x:\sigma_y:\nu$	$U_{w-exp}$ (MPa)	$U_{w-theory}/U_{w-exp}$	
						MCFT	DSFM
PV10	14.5	1.79	1.00	0:0:1	3.97	0.947	0.957
PV11	15.6	1.79	1.31	0:0:1	3.56	1.011	1.034
PV12	16.0	1.79	0.45	0:0:1	3.13	1.016	0.958
PV16	21.7	0.74	0.74	0:0:1	2.14	0.935	0.935
PV18	19.5	1.79	0.32	0:0:1	3.04	1.138	1.085
PV19	19.0	1.79	0.71	0:0:1	3.95	1.043	1.023
PV20	19.6	1.79	0.89	0:0:1	4.26	1.042	1.042
PV21	19.5	1.79	1.30	0:0:1	5.03	1.002	1.049
PV22	19.6	1.79	1.53	0:0:1	6.07	1.023	1.107
PV23	20.5	1.79	1.79	-0.39:-0.39:1	8.87	0.812	0.902
PV25	19.3	1.79	1.79	-0.69:-0.69:1	9.12	0.816	0.886
PV27	20.5	1.79	1.79	0:0:1	6.35	1.023	1.164
PV28	19.0	1.79	1.79	0.32:0.32:1	5.80	0.985	1.125
<b>Vecchio and Collins Panels</b>					<b>Mean</b>	<b>0.984</b>	<b>1.021</b>
					<b>COV(%)</b>	<b>9.2</b>	<b>8.6</b>
PA1	49.9	1.65	0.82	0:0:1	6.34	0.974	0.979
PA2	43.0	1.65	0.82	0:0:1	6.22	0.993	0.998
PHS1	72.2	3.23	0.00	0:0:1	2.95	1.035	0.976
PHS2	66.1	3.23	0.41	0:0:1	6.66	0.970	0.912
PHS3	58.4	3.23	0.82	0:0:1	8.19	1.109	1.103
PHS4	68.5	3.23	0.82	0.25:0.25:1	6.91	1.014	0.976
PHS5	52.1	3.23	0.41	0.25:0.25:1	4.81	0.910	0.855
PHS6	49.7	3.23	0.41	-0.25:-0.25:1	9.89	0.890	0.890
PHS7	53.6	3.23	0.82	-0.25:-0.25:1	10.30	1.105	1.152
PHS8	55.9	3.23	1.24	0:0:1	10.80	0.991	1.024
PHS9	56.0	3.23	0.41	-0.25:-0.25:1	9.37	1.009	0.996
PHS10	51.4	3.23	1.24	0.25:0.25:1	8.58	0.998	1.007
<b>Aspiotis Panels</b>					<b>Mean</b>	<b>1.000</b>	<b>0.989</b>
					<b>COV(%)</b>	<b>6.5</b>	<b>8.4</b>
PB6	17.6	1.09	0.00	1:0:1	1.15	1.176	1.086
PB8	20.4	1.09	0.00	2.98:0:-1	0.80	1.238	1.206
PB10	24.0	1.09	0.00	5.94:0:-1	0.56	1.200	1.193
PB14	41.1	2.02	0.00	3.01:0:-1	1.54	1.042	0.927
PB16	41.7	2.02	0.00	1.96:0:-1	1.42	1.197	1.176
PB17	41.6	2.02	0.00	5.93:0:-1	1.22	1.023	0.953
PB18	25.3	2.20	0.00	0:0:-1	1.72	1.221	1.221
PB19	20.0	2.20	0.00	1.01:0:-1	1.28	1.305	1.142
PB20	21.7	2.20	0.00	2.01:0:-1	1.42	1.085	0.953
PB21	21.8	2.20	0.00	3.08:0:-1	1.42	1.000	0.874
PB22	17.6	2.20	0.00	6.09:0:-1	1.03	1.080	0.972
PB29	41.6	2.02	0.00	2.02:0:-1	1.49	1.188	1.054
PB30	40.4	2.02	0.00	2.96:0:-1	1.48	1.088	0.961
PB31	43.4	2.02	0.00	5.78:0:-1	1.15	1.092	1.017
PB32	57.7	2.20	0.00	3.01:0:-1	1.49	1.114	1.023
<b>Bhide Panels</b>					<b>Mean</b>	<b>1.136</b>	<b>1.051</b>
					<b>COV(%)</b>	<b>7.8</b>	<b>10.8</b>
<b>Total:</b>					<b>Mean</b>	<b>1.046</b>	<b>1.022</b>
					<b>COV(%)</b>	<b>10.3</b>	<b>9.6</b>

Figura 2.39: Resultados del análisis de los paneles [29].



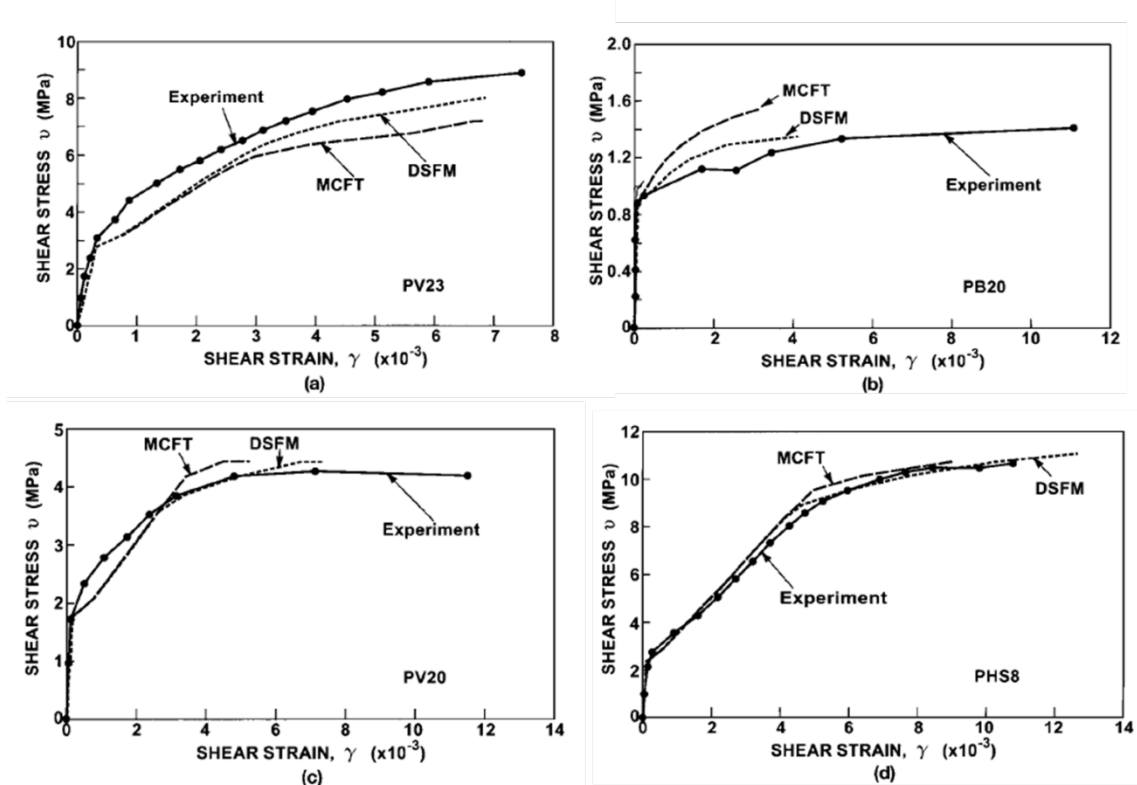


Figura 2.40: Gráficas carga-deformación para paneles representativos: (a) Panel PV23; (b) Panel PB20; (c) Panel PV20; (d) Panel PHS8 [29].

Se analizan también 54 vigas a cortante (ver figura 2.41, 2.42 y 2.43): una serie de 18 vigas ensayadas por Stanik y Collins (1998), una serie de 12 vigas ensayadas por Bresler y Scordelis (1963) y una serie de 24 vigas ensayadas por Gupta (1998). Todas las series se validan con los modelos *DSFM*, *MCFT* y con la formulación del Instituto Americano del Hormigón (*ACI*).

Beam	$V_{u-exp}$ (kN)	$V_{u-theor}$ (kN)			$V_{u-theor}/V_{u-exp}$		
		DSFM	MCFT	ACI	DSFM	MCFT	ACI
BM100	343	346.7	389.4	424.3	1.011	1.135	1.237
BM100D	462	431.6	466.5	424.3	0.934	1.010	0.918
BN100	192	175.8	191.1	281.9	0.916	0.995	1.468
BN100D	258	275.4	312.3	281.9	1.067	1.210	1.093
UM100	750	759.2	759.0	413.9	1.012	1.012	0.552
UM100D	910	835.4	892.6	413.9	0.918	0.981	0.455
UN100	593	784.6	825.2	302.2	1.323	1.392	0.510
UN100D	637	774.2	829.4	302.2	1.215	1.302	0.474
WM100C	699	585.3	769.6	1177.0	0.837	1.101	1.684
WM100D	834	837.1	968.7	1142.0	1.004	1.162	1.369
BRL100	164	199.6	204.5	382.9	1.217	1.247	2.335
BRH100	357	217.6	366.5	382.9	0.610	1.027	1.073
BH100	193	279.5	250.3	382.9	1.448	1.297	1.984
BH100D	281	355.9	424.1	382.9	1.267	1.509	1.363
BH50	132	114.9	132.6	186.3	0.870	1.005	1.411
BH50D	193	175.0	194.9	186.3	0.907	1.010	0.965
BN50	132	92.6	104.7	136.8	0.702	0.793	1.036
BN50D	163	138.1	150.0	136.8	0.847	0.920	0.839
<b>Stanik Beams</b>				Mean	1.006	1.117	1.154
				COV(%)	21.7	16.2	44.9
OA1	166.5	147.2	161.7	112.6	0.884	0.971	0.676
OA2	178.0	130.3	143.8	114.9	0.732	0.808	0.645
OA3	189.0	111.4	127.3	144.4	0.589	0.674	0.764
A1	233.5	244.1	240.5	163.4	1.045	1.030	0.700
A2	244.5	201.7	205.3	162.2	0.825	0.840	0.663
A3	233.5	179.7	191.0	187.5	0.770	0.818	0.803
B1	222.0	222.7	216.3	138.8	1.003	0.974	0.625
B2	200.0	167.0	171.9	136.4	0.835	0.860	0.682
B3	178.0	164.1	183.2	159.6	0.922	1.029	0.896
C1	155.5	167.9	164.8	111.3	1.080	1.060	0.716
C2	162.0	132.0	137.6	103.8	0.815	0.849	0.641
C3	135.5	134.8	142.6	115.8	0.995	1.052	0.855
<b>Bresler and Scordelis Beams</b>				Mean	0.875	0.914	0.722
				COV(%)	16.3	13.4	12.2
PC1	437	490	595	359	1.121	1.362	0.822
PC2	863	860	850	1346	0.997	0.985	1.560
PC3	845	685	760	1165	0.811	0.899	1.379
PC4	401	390	485	273	0.973	1.209	0.681
PC5	679	945	930	1689	1.392	1.370	2.782
PC6	668	715	755	1094	1.070	1.130	1.638
PC7	387	355	400	233	0.917	1.034	0.602
PC8	497	630	610	760	1.268	1.227	1.529
PC9	516	610	610	540*	1.182	1.182	1.047
PC10	726	1020	985	1277	1.405	1.357	1.759
PC11	754	1040	1040	900*	1.379	1.379	1.194
PC12	490	375	450	262	0.765	0.918	0.535
PC13	680	645	700	982	0.949	1.029	1.444
PC14	686	780	735	700*	1.137	1.071	1.020
PC15	358	385	385	350*	1.075	1.075	0.978
PC16	945	925	930	900*	0.979	0.984	0.952
PC17	707	735	735	660*	1.040	1.040	0.934
PC18	832	760	780	894	0.913	0.938	1.075
PC19	751	770	775	680*	1.025	1.032	0.905
PC20	715	1010	1030	1544	1.413	1.441	2.159
PC21	767	755	810	1116	0.984	1.056	1.455
PC22	443	390	430	252	0.880	0.971	0.569
PC23	603	550	590	751	0.912	0.978	1.245
PC24	528	425	500	277	0.805	0.947	0.525
<b>Gupta Beams</b>				Mean	1.058	1.109	1.199
				COV(%)	18.4	15.0	45.1
<b>Total:</b>				Mean	1.000	1.068	1.078
				COV(%)	20.3	16.9	46.6

Figura 2.41: Resultados del análisis de las vigas [29].

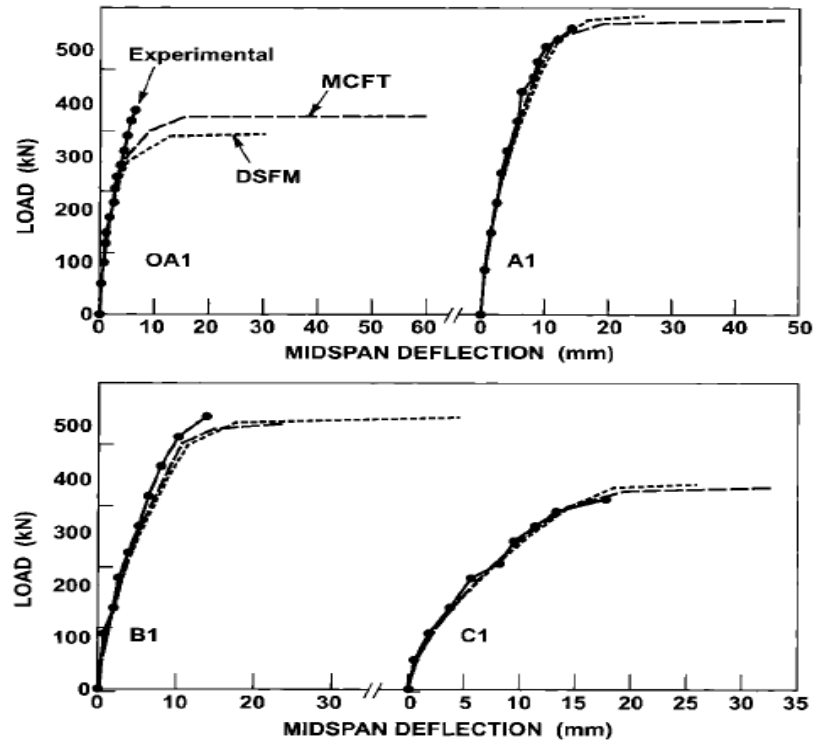


Figura 2.42: Gráficas comparativas de la respuesta carga-deformación de vigas típicas de Bresler y Scordelis [29].

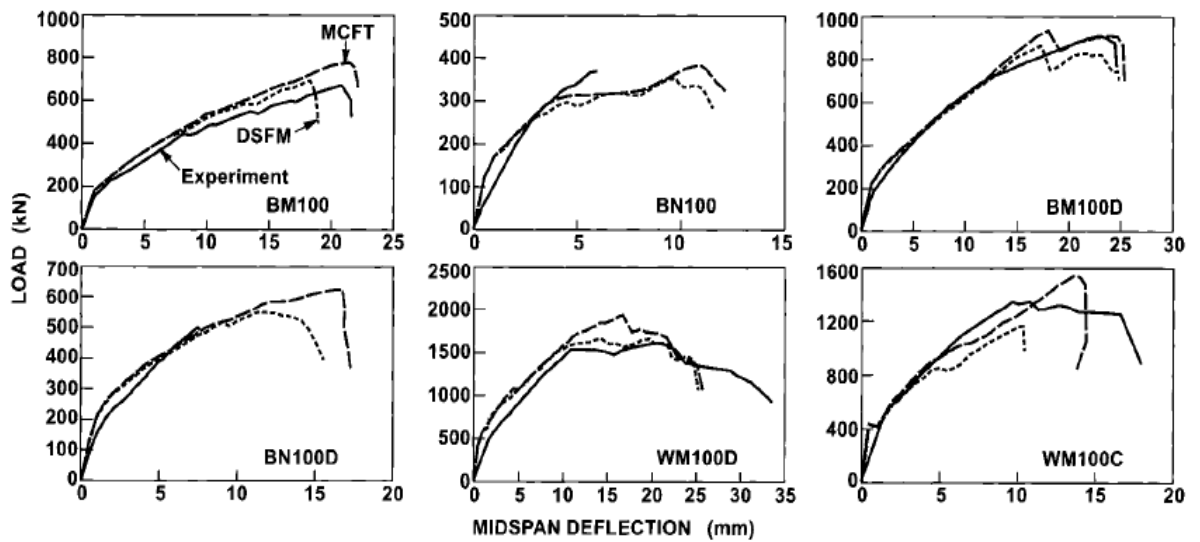


Figura 2.43: Gráficas comparativas de la respuesta carga-deformación de vigas típicas de Stanik [29].

También se analizan 13 muros a cortante que fueron ensayados por Lefas et al. (1990) (ver figuras 2.44 y 2.45). Todas las series se validan con los modelos DSFM y MCFT.

Wall	$F_{u\ exp}$ (kN)	MCFT		DSFM	
		$F_{u\ theor}$ (kN)	$\frac{F_{u\ theor}}{F_{u\ exp}}$	$F_{u\ theor}$ (kN)	$\frac{F_{u\ theor}}{F_{u\ exp}}$
SW11	260	279	1.072	281	1.081
SW12	340	334	0.981	341	1.004
SW13	330	311	0.943	317	0.960
SW14	265	262	0.990	270	0.981
SW15	320	296	0.923	303	1.019
SW16	355	367	1.035	372	1.047
SW17	247	253	1.024	255	1.033
SW21	127	124	0.973	124	0.978
SW22	150	154	1.024	154	1.024
SW23	180	173	0.962	174	0.964
SW24	120	125	1.039	126	1.049
SW25	150	168	1.120	168	1.118
SW26	123	113	0.922	118	0.960
Mean			0.997		1.011
COV (%)			5.7		5.3

Figura 2.44: Resultados del análisis de los muros [29].

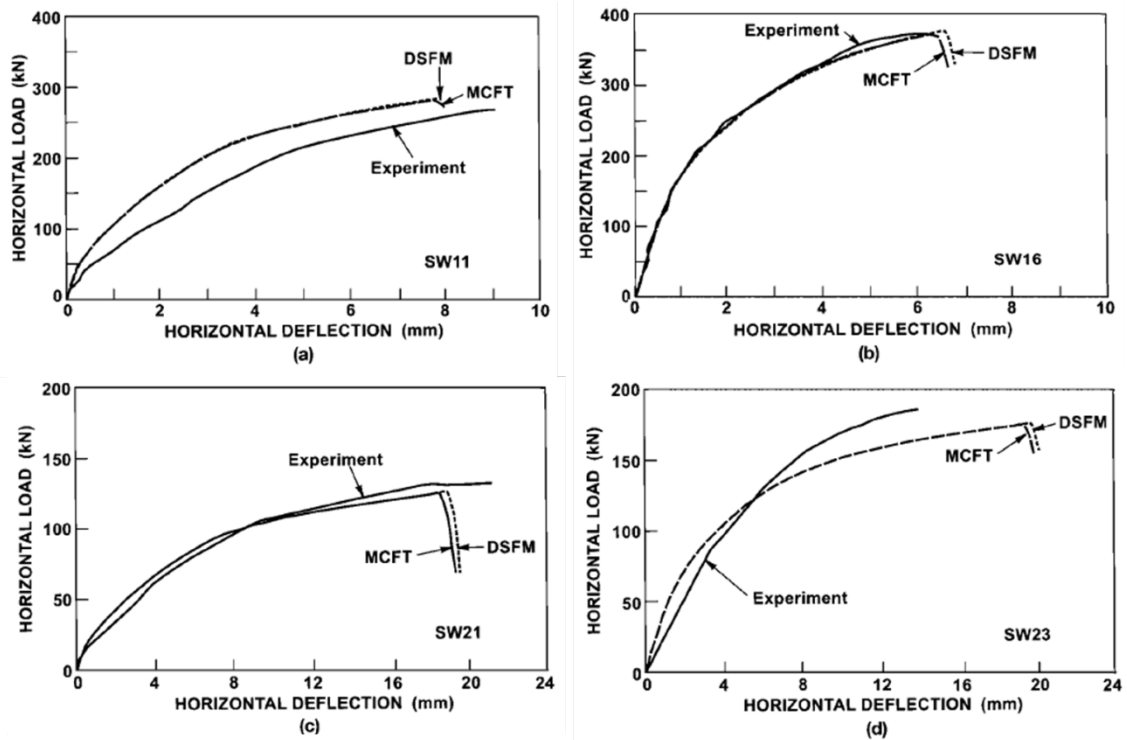


Figura 2.45: Gráficas comparativas de la respuesta carga-deformación de muros de cortante típicos de Lefas et al. [29].

Entre otras, se concluye que el *DSFM* ofrece unos cálculos más precisos de resistencia, de respuesta carga-deformación y modo de rotura que el *MCFT*. Pese a ser un modelo más simple, el modelo *MCFT* ofrece buenos resultados y una buena precisión para un gran rango de casos. Aunque el *MCFT* asuma la coaxialidad de las tensiones y las deformaciones y ello sea una inexactitud, su influencia es muy poca en muchos casos.

### 2.4.13. ALAN H. MATTOCK (2001) [8].

Recientes estudios experimentales acerca de la resistencia a cortante entre las caras rugosas de las fisuras ("*shear friction*" [16, 17]) con hormigones de alta resistencia, codificada en la *ACI Building Code*, corroboran que dicha resistencia no se obtiene con exactitud y queda infravalorada. Este artículo muestra una re-evaluación de algunos ensayos a cortante disponibles y presenta unas ecuaciones simples y disponibles para usar en el diseño. Estas ecuaciones reflejan la influencia de la resistencia del hormigón en la resistencia a corte en las fisuras. Dan grandes ventajas en la obtención de altas resistencias a cortante en las fisuras en hormigones de alta resistencia a compresión por encima del rango del límite elástico del armado a cortante. Esto conduce a una reducción de la cantidad de armado en las conexiones de hormigón prefabricado

La norma ACI se basa en la condición de que existe la fisura por cortante antes de que sea aplicada la carga de corte. No obstante, se sabe que el comportamiento del hormigón armado cuando está previamente fisurado difiere del comportamiento del hormigón armado cuando no lo está.

Como ya se estudió en [5] en el apartado 2.4.2 de este capítulo, en el caso de hormigones armados sin fisuración previa, aparecen fisuras cortas de tracción a través del plano de corte formando bielas de compresión diagonales. Estas bielas se integran con las armaduras de cortante que atraviesan el plano de corte formando un mecanismo de celosía, que es el que se encarga de resistir el cortante a lo largo del plano de corte. La rotura se produce cuando fallan las bielas tras la plastificación de dicho armado.

Cuando el cortante se resiste a través de hormigón armado con fisuración previa, el deslizamiento se produce a lo largo del plano de la fisura. La resistencia a corte se desarrolla debido a la combinación de la proyección de la tensión tangencial en las caras de la fisura y la resistencia al deslizamiento por fricción debida a la compresión entre las caras. Esta compresión en el hormigón resulta de la tracción en el armado causada por la separación de las caras irregulares cuando deslizan una sobre la otra. Cuando la fisura presenta gran cantidad de armado, las caras de las fisuras se quedan bloqueadas y no se deslizan una sobre la otra. Esto provoca fisuras por tracciones diagonales a través de la fisura original, y el fallo se produce de una manera similar a la que ocurre cuando el hormigón no presenta fisuración previa. En esta fase, la resistencia a cortante se incrementa acorde a la resistencia a la plastificación del armado  $A_v f_y$  con un ratio más reducido.

El método que propone la *ACI* asume que la resistencia a corte es directamente proporcional a la resistencia a la plastificación  $A_v f_y$  del armado de cortante que atraviesa el plano de corte en ángulo recto. Esta simplificación que propone la *ACI* no refleja la variación real de la resistencia a corte del hormigón armado con un plano de cortante previamente fisurado con la resistencia a la plastificación del armado de cortante. Inicialmente la resistencia a corte aumenta de manera rápida conforme aumenta la resistencia a la plastificación del armado; no obstante, el ratio de incremento va decreciendo de manera gradual hacia un valor constante. Por tanto, lo que propone la *ACI* puede estar del lado de la inseguridad para ciertos casos.

Se evalúan ensayos tipo *push-off* procedentes de la literatura [15, 7, 5, 10, 20, 7] y se proponen un conjunto de ecuaciones para calcular la resistencia a cortante con mayor exactitud.

#### 2.4.14. K. N. RAHAL (2010) [9].

En este artículo, se lleva a cabo un modelo para resolver el problema de la transmisión del esfuerzo cortante en elementos de membrana sometidos a tensiones en su propio plano y vigas sujetas a cortante y a torsión de hormigón armado. Dicho modelo relaciona la resistencia a corte en una superficie de contacto con el estado de tensiones en un elemento membrana a lo largo de dicha superficie. La resistencia a corte se relaciona, de este modo, no sólo con la resistencia del hormigón y del acero que lo abraza (en forma de cerco), sino también al acero paralelo al plano de corte. Los resultados del modelo propuesto se comparan con los resultados experimentales de 114 probetas tipo *push-off* y 15 vigas procedentes de la literatura. Este modelo también sirve para obtener los coeficientes empíricos de métodos existentes que relacionan la resistencia a cortante a través de un plano de corte con la raíz cuadrada de la resistencia de confinamiento.

Se parte del modelo SMCS (Simplified Model for Combined Stress Resultants) desarrollado por el propio Rahal 2008 [30]. Se trata de un modelo simple y no iterativo para el cálculo de la resistencia a cortante y el modo de fallo de elementos membrana sujetos a tensiones de corte en el plano y tensiones normales. El modelo también se ha generalizado para su aplicación en vigas de hormigón armado y pretensado sujetas a esfuerzos de corte combinados con flexión y axil (Rahal 2000 [31]), a torsión pura (Rahal 2000 [32]) y torsión combinada con flexión (Rahal 2007 [33]). En este artículo se extiende la aplicación del modelo para resolver el problema de la transferencia del esfuerzo cortante a través de un plano de corte.

A partir del SMCS para cortante puro (ver resumen en figura 2.46), se añade el efecto de tensiones normales por superposición. El modelo asume que los factores más importantes que afectan a la resistencia a cortante puro de los elementos membrana son las cantidades y la resistencia del acero ortogonal y la resistencia a compresión del hormigón. Otros factores como el tamaño máximo del árido y el diámetro y la separación de las armaduras tienen un efecto limitado y se desprecian. Los tres factores más importantes se combinan de forma eficiente en los siguientes índices de armado:

$$w_x = \frac{\rho_x f_{y-x}}{f'_c}; w_y = \frac{\rho_y f_{y-y}}{f'_c} \quad (2.95)$$

donde  $w_x$ ,  $w_y$  son los índices de armado en dirección  $x$  y en dirección  $y$ , respectivamente;  $\rho_x$ ,  $\rho_y$  son los ratios de armado en dirección  $x$  y en dirección  $y$ , respectivamente; y  $f_{y-x}$ ,  $f_{y-y}$  es la tensión de plastificación del armado en dirección  $x$  y en dirección  $y$ , respectivamente.

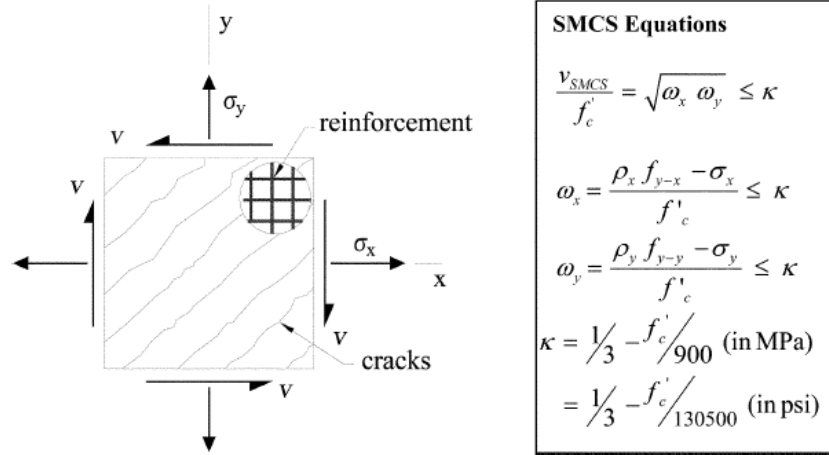


Figura 2.46: Elemento membrana sujeto a tensiones en el plano y resumen de las ecuaciones del modelo SMCS [9].

Se pueden usar modelos avanzados para el cálculo de la resistencia y del modo de rotura del elemento membrana visto en la figura 2.46. Por ejemplo, el modelo MCFT [23] se usa para calcular la relación entre los índices de armado por un lado y la resistencia a cortante y el modo de rotura por el otro. Por tanto, se combina el SMCS con el MCFT.

El modelo SMCS se valida, junto con otros modelos, con resultados experimentales de 114 probetas tipo push-off (prefisuradas y sin fisuración previa) y 15 vigas. En la tabla que se muestra en la figura 2.47 se resumen los resultados.

Source of tests	No. of tests	$f'_c$ , MPa	$\rho_y f_{y-y}$ , MPa	$\rho_x f_{y-x}$ , MPa	$\sigma_y$ , MPa	Average of observed-to-calculated shear strength (coefficient of variation, %)					
						Method					
						SMCS	Mattock <sup>16</sup>	Mau and Hsu <sup>14</sup>	Walraven et al. <sup>6</sup>	Loov and Patnaik <sup>15</sup>	ACI 318-05 <sup>17</sup>
Hofbeck et al. <sup>1</sup>	33	16 to 31	0.34 to 10	17.7	0	1.17 (12.6)	1.18 (20.5)	1.04 (13.4)	1.05 (11.8)	1.18 (15.9)	1.69 (28.0)
Mattock and Hawkins <sup>2</sup>	3	28 to 40	2.15 to 6.8	*	0 to 5.61	1.08 (8.86)	1.03 (14.2)	0.99 (19.1)	0.96 (10.1)	1.42 (21.1)	1.66 (13.7)
Mattock et al. <sup>3</sup>	9	26 to 29	3.65 to 5.6	16.6 <sup>†</sup>	-2.76 to 0	1.05 (9.24)	1.05 (9.98)	0.88 (9.18)	0.94 (10.1)	0.95 (9.59)	1.40 (18.8)
Mattock <sup>4</sup>	8	41	1.6 to 13.3	*	0	1.09 (8.40)	1.06 (18.0)	0.93 (12.4)	0.91 (8.57)	1.06 (16.5)	1.97 (22.8)
Mattock et al. <sup>5</sup>	6	28	1.5 to 7.7	24.3	0	1.00 (8.04)	0.99 (4.28)	0.89 (10.8)	0.91 (9.77)	1.02 (15.6)	1.38 (10.2)
Walraven et al. <sup>6</sup>	31	17 to 48	1.1 to 15.2	9.45 <sup>‡</sup>	0	1.17 (15.3)	1.12 (11.5)	1.03 (11.5)	0.99 (11.8)	1.18 (13.4)	1.70 (18.5)
Walraven and Stroband <sup>7</sup>	6	99	3.3 to 14.9	*	0	0.92 (12.6)	1.02 (10.5)	0.66 (12.6)	0.53 (6.13)	0.72 (12.9)	2.43 (31.4)
Nagle and Kuchma <sup>8</sup>	18	93 to 121	0.73 to 6.3	5.84	0	1.18 (19.8)	0.91 (21.4)	0.42 (19.9)	0.43 (15.5)	0.45 (21.0)	1.48 (21.3)
Loov and Patnaik <sup>15§</sup>	15	19 to 48	0.4 to 7.7		0	1.19 (9.76)	1.56 (35.3)	0.98 (9.85)	1.03 (9.38)	1.04 (8.96)	1.64 (14.1)
<b>All tests</b>	<b>129</b>	<b>16 to 121</b>	<b>0.34 to 15.2</b>	<b>—</b>	<b>-2.76 to 5.61</b>	<b>1.14 (14.8)</b>	<b>1.14 (26.7)</b>	<b>0.90 (26.5)</b>	<b>0.90 (26.8)</b>	<b>1.02 (29.2)</b>	<b>1.67 (25.7)</b>

<sup>†</sup> Longitudinal reinforcement relatively large, upper limit (=κ) is assumed.  
<sup>‡</sup> Based on assumed value of  $f_{y-x} = 460$  MPa (69 ksi) (results do not change for any  $f_{y-x} > 240$  MPa [35 ksi]).  
<sup>§</sup> Calculated based on assumed value of  $f_{y-x} = 460$  MPa [69 ksi].  
<sup>||</sup> Composite beam specimens.  
<sup>|||</sup> Near flexural compression zone, upper limit (=κ) is assumed.  
 Note: 1 MPa = 145 psi.

Figura 2.47: Resumen de la correlación del cálculo de seis métodos con las capacidades a cortante obtenidas de forma experimental [9].

## CONCLUSIONES:

Tras la comparación con otros cinco modelos semi-empíricos y con la validación experimental procedente de la literatura, se concluye que el SMCS aporta resultados con suficiente precisión.

La mayor precisión del modelo se obtiene por su capacidad a la hora de tener en cuenta los efectos del armado en la dirección paralela al plano de corte.

Los modelos semi-empíricos que relacionan la resistencia a cortante con la raíz cuadrada de la resistencia de confinamiento se pueden tener en cuenta como casos generales del modelo SMCS. Las ecuaciones de los modelos semi-empíricos se pueden derivar a partir de las del modelo SMCS para los casos donde las probetas tiene mayor armado del necesario en la dirección paralela al plano de corte.

El modelo SMCS es un modelo generalizado aplicable a elementos membrana sujetos a tensiones en el plano y a vigas sujetas a la combinación de cortante y flexión y a la combinación de torsión y flexión, con precisión y simplicidad.

## **2.5. Estudios experimentales, modelización y teorías sobre la transmisión del esfuerzo cortante para hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC).**

El hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC) se trata de un hormigón que presenta ciertas mejoras con respecto al hormigón convencional. Con la inclusión de la suficiente cantidad de fibras se consigue menor fragilidad (mayor ductilidad), se mejora la resistencia a tracción antes y después de la fisuración, la capacidad de control de la retracción, la resistencia a cortante debido a que las fibras producen un efecto de "cosido" de las caras de las fisuras y, con ello, se controla la separación, distribución y abertura de las fisuras. No obstante, existen una serie de características que dificultan el estudio del comportamiento frente al esfuerzo cortante y, en consecuencia, el modelado de elementos con hormigón armado y reforzado con fibras de acero. El comportamiento a cortante del SFRC no está totalmente definido debido a su complejo mecanismo caracterizado por la transferencia del cortante entre las caras de las fisuras (engranamiento de áridos), dirección de las fibras en las caras de las fisuras, la adherencia de las fibras y la matriz de hormigón, el efecto pasador de las armaduras,... Por tanto, éstas son las características que, dependiendo de cómo se tengan en cuenta, dan lugar a un tipo de modelo u otro, mayor o menor precisión y mayor o menor dificultad de cálculo.

En el apartado del estado del arte de la tesina final de máster de Mauro Barosio, 2011 [34] se describen de manera detallada los distintos tipos de modelos constitutivos empleados para el hormigón armado y reforzado con fibras de acero. El comportamiento post-fisuración del hormigón reforzado con fibras puede ser descrito empleando una relación del tipo tensión-abertura de fisura ( $\sigma-w$ ) o bien del tipo tensión-deformación ( $\sigma-\varepsilon$ ). En base a esto, se pueden encontrar en la literatura modelos constitutivos como los de Lim-Paramasivam-Lee [35], Kovacs-Balazs [36], Dupont-Vandewalle [37], Lok-Xiao [38], Serna-Fuster [39], Kooiman [40], Strack [41], Lee-Barr [42],... y los modelos constitutivos que se usan en distintas normativas



como los de la norma alemana DBV (2001) , el RILEM (2003) [43], la norma italiana CNR-DT 204 (2006) [44], la norma española EHE (2008) [45],...

El hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC) ha venido siendo usado como material estructural desde 1960 [50-52]. Batson et al. [53] llevó a cabo ensayos de cortante en 102 ensayos de vigas fabricadas con SFRC utilizando como parámetros clave la fracción volumétrica de fibras de acero ( $V_f$ ) y ratios luz/profundidad de cortante ( $a/d$ ), y concluyó que la inclusión de fibras de acero en el hormigón mejoraba de manera considerable la resistencia a cortante en comparación con el hormigón convencional. Swamy et al. [54] verificó de manera experimental que las piezas fabricadas con SFRC mejoraban la resistencia a cortante en comparación con piezas de hormigón convencional sin armadura de cortante. Sharma [55] propuso una ecuación para la resistencia a cortante relativamente simple basándose en experiencias con piezas armadas con distintas cantidades de armadura de cortante. En ella se reflejaba el ratio luz/profundidad de cortante ( $a/d$ ) y la resistencia a tracción del SFRC. El comité 544 de la ACI [50] la recomendó y la contempló como ecuación para la evaluación de la resistencia a cortante de piezas fabricadas con SFRC en el manual del hormigón de la ACI del 2008 [56]. Narayanan y Darwish [57] llevaron a cabo 49 ensayos con vigas fabricadas con SFRC, y propusieron una ecuación para la evaluación de la resistencia a cortante considerando el efecto arco que venía influenciado por el ratio  $a/d$  de dichas vigas. Ashour et al. [58] propusieron una ecuación para la evaluación de la resistencia a cortante para piezas fabricadas con hormigón de alta resistencia con fibras de acero, la cual tenía en cuenta como variables principales el ratio  $a/d$ , la fracción volumétrica de fibras ( $V_f$ ), la densidad de armado longitudinal ( $\rho_s$ ), etc. Khuntia et al. [59] propuso una ecuación simple para la evaluación de la resistencia a cortante de las piezas de SFRC teniendo en cuenta un ángulo de inclinación de las fisuras de  $45^\circ$ , el efecto arco, la fracción volumétrica de fibras ( $V_f$ ), la orientación de las fibras y la longitud embebida en las fisuras efectiva de las fibras. Oh et al. [60] propuso una ecuación simple en la que consideraba como parámetros de influencia la densidad de armado longitudinal ( $\rho_s$ ), la fracción volumétrica de fibras ( $V_f$ ) y el ratio  $a/d$ .

Tan et al. [61] realizó un intento pionero de expandir la aplicación del modelo de celosía rotativo (*RA-STM*) originalmente desarrollado por Hsu [62] a piezas fabricadas con SFRC. Aunque sus análisis mostraban una buena similitud con los resultados experimentales, las curvas de reblandecimiento por compresión y tensión de stiffening del SFRC sometidas a tensiones biaxiales, las cuales suponían un concepto importante en el modelo, resultaban faltas de verificación experimental. Posteriormente, Tan et al. [63] propuso un modelo analítico para el SFRC basado en el MCFT de Vecchio y Collins [23].

Lihua et al. [64] usó para el análisis del comportamiento a cortante de vigas fabricadas con SFRC un programa comercial de elementos finitos obteniendo resultados relativamente precisos. La falta de ajuste fue debido a que su modelo de análisis presentaba un cierto grado de complicación debido al uso de elementos finitos tridimensionales, a la falta de validaciones experimentales de los modelos constitutivos del material y a la falta de consideración de los parámetros que definen el SFRC: la fracción volumétrica ( $V_f$ ), la orientación y el tipo de fibras. Susetyo [48] propuso modelos de material adecuados para el SFRC, basando los resultados en experimentos llevados a cabo con 8 paneles fabricados con SFRC. Generó el modelo de elementos finitos no lineal basándose en los modelos de material y obtuvo buenos resultados

de estimación de la resistencia a cortante. Además, mencionaba que sería necesario llevar a cabo el desarrollo de modelos de análisis que contemplaran el fallo por pérdida de adherencia (*pull-out*) del SFRC producido entre las fibras de acero y el hormigón en la interfaz de las fisuras.

Aunque las ecuaciones simples sobre la resistencia a cortante [55, 57-60] reflejan las variables claves como el ratio  $a/d$ , el factor volumétrico de las fibras de acero ( $V_f$ ), la densidad de armado longitudinal ( $\rho_s$ ), etc., éstas todavía se encuentran faltas de cierta base teórica ya que los factores de influencia más importantes se obtienen de forma empírica, basándose en los resultados experimentales que se van obteniendo. Por otra parte, los modelos de estimación del comportamiento a cortante [61, 63] y los modelos de análisis numérico [64, 65], basados en el modelo de fisuración difusa tipo celosía [23, 62], muestran aproximaciones a los resultados de ensayos experimentales obtenidos con piezas fabricadas con SFRC relativamente buenos. Sin embargo, estos modelos de comportamiento no consiguen captar de una forma clara el mecanismo de transferencia del cortante del SFRC, incluyendo el fallo por adherencia (*pull-out*) entre las fibras de acero y el hormigón en la interfaz de las fisuras [48]. Además, dependen en gran medida de ensayos experimentales (por ejemplo ensayos con paneles) para la modificación de las ecuaciones constitutivas del SFRC debido al comportamiento conjunto de las fibras de acero y del hormigón [66].

A continuación se realiza una cronología y una breve descripción sobre los trabajos acerca del estudio de la transmisión del esfuerzo cortante en hormigón armado y reforzado con fibras de acero que han llevado a cabo los distintos autores a lo largo de los últimos años.

### 2.5.1. B. BARRAGÁN, R. GETTU, L. AGULLÓ, and R. ZERBINO (2006) [46].

El objetivo del este trabajo es el de caracterizar el modo de fallo y la resistencia del hormigón reforzado con fibras de acero (SFRC) sujeto a esfuerzos de cortante a nivel material. Para ello se lleva a cabo una campaña experimental con ensayos tipo *push-off* para el estudio del comportamiento tanto del hormigón normal (30MPa) como del hormigón de alta resistencia (70MPa) armados con fibras de acero (ver figura 2.48 ).

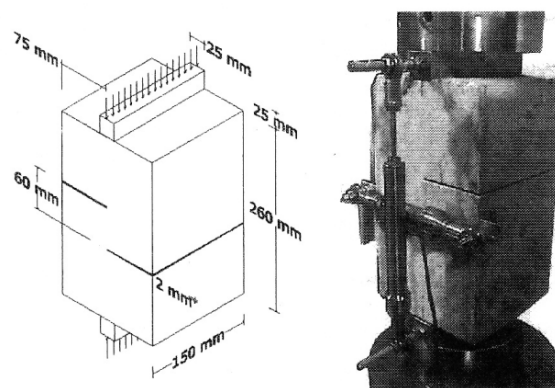


Figura 2.48: Probeta tipo *push-off* usada [46].

De aquí se obtienen resultados visuales sobre el modo de fallo de las probetas que se distinguen en función de la resistencia del hormigón y de la cantidad de fibras de acero que contiene el hormigón (ver figura 2.49 ).

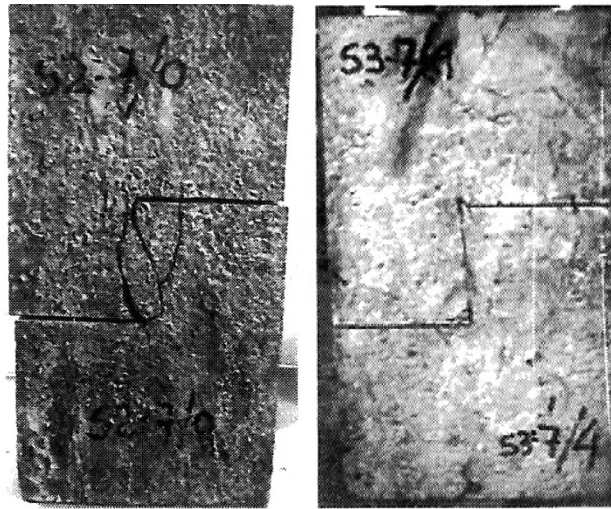


Figura 2.49: Modo de fallo de una probeta tipo push-off fabricada con hormigón de alta resistencia (70MPa), (izquierda) sin fibras, (derecha) con fibras (40kg/m<sup>3</sup>) [46].

Además, también se obtienen resultados tensión tangencial-deslizamiento, que marcan el comportamiento del SFRC frente a cortante (ver figura 2.50 ).

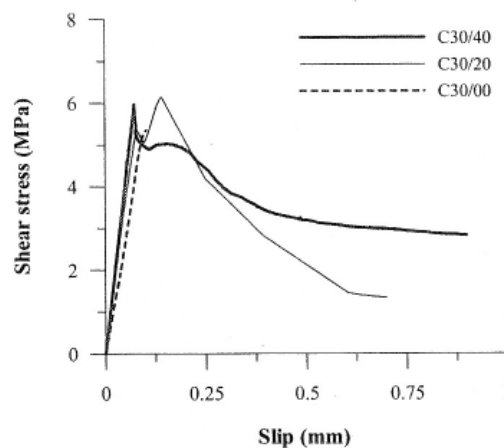


Figura 2.50: Gráfica tensión tangencial-deslizamiento para hormigón de 30MPa con 0kg/m<sup>3</sup>, 20kg/m<sup>3</sup> y 40kg/m<sup>3</sup> de fibras respectivamente [46].

A partir de estos resultados se definen los parámetros que caracterizan la resistencia del SFRC:

- resistencia a cortante absoluta, entendida como el área bajo la curva tensión-deslizamiento hasta un límite de deslizamiento prescrito ( $s_{lim}$ ):

$$B_{s_{lim}}^S = \int_0^{s_{lim}} \tau^S(s) ds \quad (2.96)$$

- resistencia a cortante equivalente, entendida la resistencia a cortante absoluta dividida por el valor límite de deslizamiento prescrito:

$$f_{slim}^s = \frac{B_{slim}^s}{s_{lim}} = \int_0^{s_{lim}} \tau^s(s) ds \quad (2.97)$$

- resistencia a cortante residual, entendida como una medida directa de la tensión efectiva que puede ser transferida a través de una fisura abierta.

También se realiza un modelo de elementos finitos elástico para demostrar la presencia de tensiones de cortante en el plano de corte y en las entallas de la pieza *push-off* (ver figura 51).

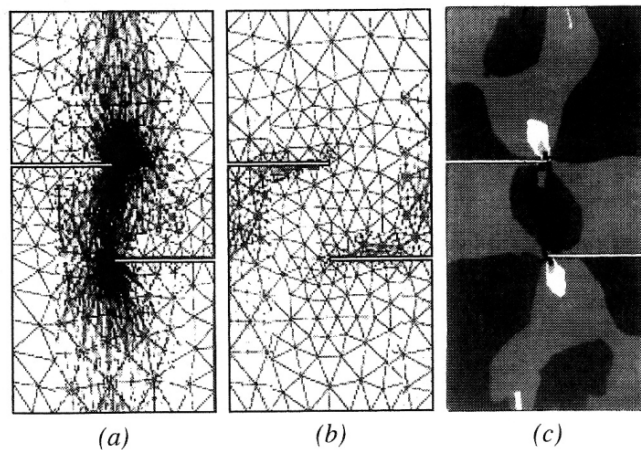


Figura 2.51: Malla de elementos finitos usada y distribuciones de tensiones de (a) compresión, (b) tracción y (c) corte (las partes oscuras indican magnitudes altas de tensión) [46].

#### CONCLUSIONES:

Los ensayos realizados con piezas tipo *push-off* demuestran que existe una capacidad de disipación de energía del SFRC en el régimen post-fisura. La incorporación de fibras en el hormigón sujeto a cortante conduce a una mejor integridad mecánica durante el fallo. La resistencia al deslizamiento y el efecto pasador de las fibras pueden conducir a una capacidad de carga-sujeción residual en situaciones donde se produce el fallo por cortante.

Se obtienen mejoras significativas en la ductilidad del hormigón durante el fallo por cortante. Además, también se observa un cierto incremento de la resistencia a cortante con la incorporación de las fibras tanto en hormigón de resistencia normal como en hormigón de alta resistencia.

El conocimiento de la tensión a cortante que puede ser transmitida a través de una fisura abierta es de gran importancia para aproximaciones al diseño basadas en mecanismos de fractura, donde la resistencia a cortante residual y/o equivalente se pueden integrar a lo largo de las secciones de un elemento estructural sujeto a cortante para calcular su resistencia a cortante.

El ensayo tipo *push-off*, debido a su simplicidad, se puede usar para evaluar la resistencia a cortante de SFRC. No obstante, como las fibras tienden a tener una orientación determinada

debido a la compactación del hormigón o su puesta en obra, los ensayos de laboratorio deberían mejorarse de modo que el plano de rotura represente la distribución de las fibras en el elemento estructural.

### **2.5.2. D. H. LEE, J. H. HWANG, H. JU, K. S. KIM, and D. A. KUCHMA (2011) [47].**

En este artículo se lleva a cabo un proceso de análisis no lineal mediante elementos finitos para reflejar las propiedades y el comportamiento del hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC). Este análisis puede usarse para obtener el comportamiento de dicho material frente a esfuerzo cortante.

La motivación de este análisis es que el hormigón armado y reforzado con fibras de acero consigue mejorar algunos aspectos frente al hormigón convencional como son: mejora de la ductilidad mejora del comportamiento a tracción antes y después de la fisuración, mayor capacidad de control de la retracción, mejora del comportamiento frente al esfuerzo cortante debido al control de la separación, distribución y abertura de las fisuras,... No obstante, el comportamiento a cortante del SFRC no está totalmente definido debido a su complejo mecanismo caracterizado por la transferencia del cortante entre las caras de las fisuras (engranamiento de áridos), dirección de las fibras en las caras de las fisuras, la adherencia de las fibras y la matriz de hormigón, el efecto pasador de las armaduras,...

En este modelo: DTFTM (Direct Tension Force Transfer Model), las fibras de acero se modelan como elementos de transmisión de la tensión de tracción directa en la caras de las fisuras. Se trataría de una resistencia a tracción extra. Esto se utiliza en un modelo de celosía de fisuración difusa para la estimación del comportamiento del SFRC. De este modo, las características de adherencia de las fibras de acero se pueden tener en cuenta de forma más sencilla con mayor detalle, considerando la forma, la cantidad y la dirección de éstas en el modelo (ver figura 2.52). El modo de rotura del SFRC por arranque (pull-off) se consigue describir de forma más precisa.

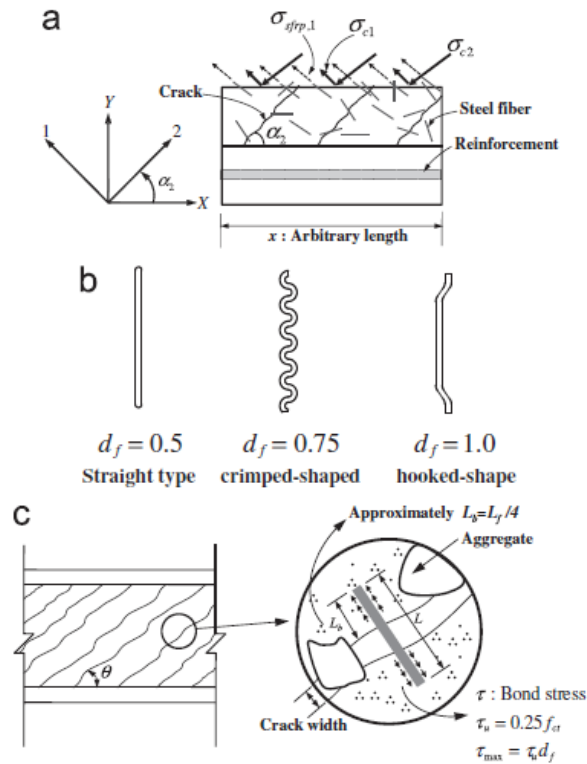


Figura 2.52: Concepto del modelo de contribución por tensión directa. (a) comportamiento de las fibras de acero entre las fisura; (b) tipo de fibras de acero y factores de forma; (c) fisuras inclinadas y fibras de acero entre las fisuras [47].

Se trata pues de un modelo 2D isotrópico donde se considera que la contribución de las fibras de acero se refleja en la matriz de rigidez no lineal secante:

$$[D_c]_{1-2} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{c2} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{E}_{c1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{G}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{c2} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{E}_{c1} + \bar{E}_{sfrp} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{E}_{c2}(\bar{E}_{c1} + \bar{E}_{sfrp})}{\bar{E}_{c1} + \bar{E}_{sfrp} + \bar{E}_{c2}} \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

donde  $\bar{E}_{sfrp}$  es el modulo secante de las fibras de acero.

Así pues se constituye el algoritmo de elementos finitos no lineal que se muestra en la figura 2.53.

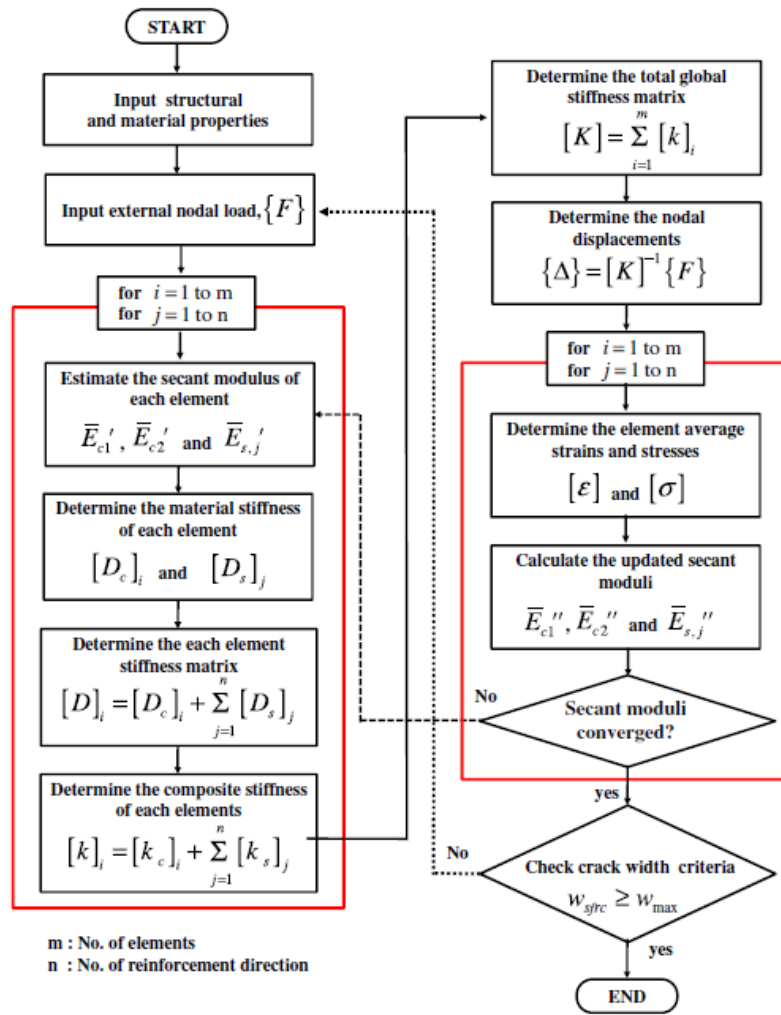


Figura 2.53: Procedimiento de análisis para el método iterativo no lineal [47].

La verificación del modelo de elementos finitos no lineal propuesto se lleva a cabo con los resultados de los paneles de hormigón armado y reforzado con fibras de acero sometidos a cortante puro realizados por Susetyo, 2009 [48], tal y como muestra la figura 2.54.

**Table 1**  
Summary of panel specimens used for verification of NLFEM with DTFTM.

Specimen names	Failure mode	Concrete		Steel fiber			
		$f'_c$ (MPa)	$\epsilon'_{cu}$ ( $\times 10^{-3}$ )	$f_{fu}$ (MPa)	$L$ (mm)	$D$ (mm)	$V_f$ (%)
C1F1V1	Interlock failure	51.4	2.150	1050	50	0.62	0.5
C1F1V2	Interlock failure	53.4	2.670	1050	50	0.62	1.0
C1F1V3	Interlock failure	49.7	2.500	1050	50	0.62	1.5
C1F2V3	Interlock failure	59.7	3.280	2300	30	0.38	1.5
C1F3V3	Interlock failure	45.5	2.340	1100	35	0.55	1.5
C2F1V3	Interlock failure	79.4	2.770	1050	50	0.62	1.5
C2F2V3	Interlock failure	76.5	2.220	2300	30	0.38	1.5
C2F3V3	Interlock failure	62.0	2.030	1100	35	0.55	1.5

Note: Size of panel, yield strength and amount of longitudinal bar are same in all specimens as 890 mm  $\times$  890 mm  $\times$  70 mm, 2063 mm<sup>2</sup> ( $\rho_{su}$ =3.31%) and 552 MPa, respectively, and all panels were not reinforced transversely.

Figura 2.54: Tabla resumen de los paneles utilizados para la verificación del modelo DTFTM [47].

CONCLUSIONES:

Se verifica que el análisis numérico propuesto con el modelo DTFTM puede considerar de manera aproximada la dirección de las fibras, las diferencias de las características de adherencia de acuerdo con el tipo de fibra y el modo de fallo por arranque (pull-out) de las fibras de acero.

Se considera que la rotura tipo pull-out de las fibras de acero es el mecanismo dominante en la interfaz de las piezas con SFRC. Usando este criterio, el modelo propuesto estima la capacidad de deformación de las piezas con SFRC de manera precisa.

Para la estimación del mecanismo de fallo tipo pull-out, el modelo de análisis sólo requiere un test simple de adherencia de las fibras de acero.

El modelo propuesto muestra estimaciones relativamente buenas del comportamiento frente a cortante de las piezas con SFRC con distintas resistencias a compresión o diferentes tipos de fibras. También se obtienen buenos resultados del comportamiento a cortante para hormigones de alta resistencia con SFRC.

**2.5.3. K. S. KIM, D. H. LEE, J. H. HWANG, and D. A. KUCHMA (2011) [49].**

En este artículo se desarrolla un modelo material para representar el comportamiento frente a esfuerzo cortante del hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC). Se trata de la descripción del modelo material que se usa para la implementación en el análisis mediante elementos finitos que se lleva a cabo en [47].

El modelo que se propone tiene en cuenta las fibras de acero como elementos que transmiten la tensión de tracción de forma directa en un modelo de celosía con fisuración difusa. Se basa en el modelo *MCFT* desarrollado por Vecchio y Collins, 1986 [23] y descrito en el apartado 2.4.7 de este mismo capítulo, para la estimación del comportamiento a cortante del SFRC. Se le añade las consideraciones referentes a las fibras de acero: características de adherencia, la forma, la cantidad de fibras, la dirección y el fallo por arranque (pull-out) de las fibras.

Las ecuaciones de compatibilidad y las ecuaciones constitutivas (relaciones tensión-deformación) son las mismas que las usadas en el *MCFT* [23]. El efecto de las fibras se tiene en cuenta en el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio tanto en la dirección transversal como en la longitudinal.

- Ecuación de equilibrio en dirección transversal:

$$A_f f_{sf} n \cos \theta - (f_2 \sin^2 \theta - f_1 \cos^2 \theta) b_w x = 0 \quad (2.99)$$

donde  $A_f$  y  $f_{sf}$  son la sección transversal y la tensión de tracción de las fibras, respectivamente, y  $n$  es el número de fibras efectivas en la dirección principal de tracción. El número de fibras efectivas por unidad de área se calcula como:

$$n_w = \frac{\lambda V_f}{A_f} \quad (2.100)$$



donde  $V_f$  la fracción volumétrica de fibras de acero y  $\lambda$  es el factor de orientación de la fibra en la dirección considerada que puede ser calculado. En este artículo se usa  $\lambda = 0.41$ . De este modo n se puede obtener como:

$$n = n_w b_w x \cos \theta \quad (2.101)$$

donde  $b_w x \cos \theta$  es el área del plano paralelo a la superficie fisurada.

Asumiendo que el ángulo de inclinación de las fisuras coincide con la dirección principal de tensión, la tensión de tracción de las fibras de acero,  $f_{sf}$  en la dirección principal de tracción se puede expresar como:

$$f_{sf} = E_{sf} \varepsilon_1 \quad (2.102)$$

De este modo la ecuación de equilibrio en la dirección principal teniendo en cuenta las características de las fibras de acero queda como:

$$0.41 V_f f_{sf} b_w \cos^2 \theta - (f_2 \sin^2 \theta - f_1 \cos^2 \theta) b_w = 0 \quad (2.103)$$

- Ecuación de equilibrio en la dirección longitudinal, procediendo de forma similar a la obtención de la ecuación de equilibrio en dirección transversal, se llega a:

$$A_{sx} f_{sx} + 0.41 V_f f_{sf} b_w j d \sin^2 \theta - V \cot \theta + f_1 b_w j d = 0 \quad (2.104)$$

En este artículo se considera que la tensión límite máxima de las fibras de acero viene afectada por la tensión de adherencia de las fibras, la longitud de las fibras y de la abertura de fisura.

La límite de la tensión local también viene afectada por la presencia de las fibras. Las fibras irán adquiriendo tensión conforme se vayan abriendo las fisuras (ver figura 2.55).

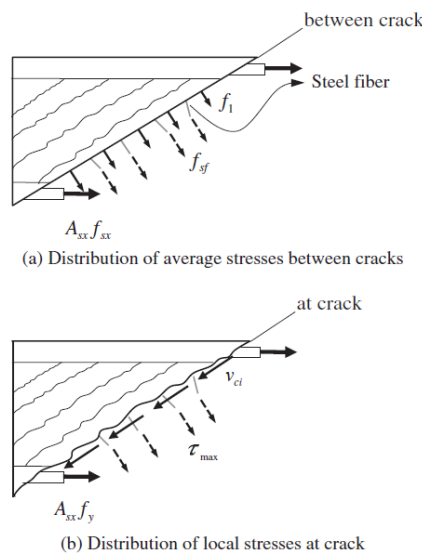


Figura 2.55: Transmisión de las fuerzas a través de las fisuras [49].

En el propio artículo [49] se puede ver el diagrama-algoritmo de aplicación del modelo material para SFRC.

La validación del modelo se lleva a cabo a partir de ensayos experimentales procedentes de la literatura: 8 paneles de SFRC ensayados por Susetyo [48] (ver figura 2.56) y un total de 80 vigas también de SFRC [53, 57, 58, 66-69] (ver figura 57).

Details of SFRC panels.

Name	$V_f$ (%)	$L_f$ (mm)	$D_f$ (mm)	$L_f/D_f$	$f'_c$ (MPa)
C1F1V1	0.5	50	0.62	81	51.4
C1F1V2	1.0	50	0.62	81	53.4
C1F1V3	1.5	50	0.62	81	49.7
C1F2V3	1.5	30	0.38	79	59.7
C1F3V3	1.5	35	0.55	64	45.5
C2F1V3	1.5	50	0.62	81	78.8
C2F2V3	1.5	30	0.38	79	76.5
C2F3V3	1.5	35	0.55	64	62

Figura 2.56: Paneles de Susetyo de SFRC [49].

No. of specimens	Shape	$V_f$ (%)	$L_f$ (mm)	$D_f$ (mm)	$(f'_c)$ (MPa)	$d$ (mm)	$a/d$	$\rho_s$ (%)
13	Round	0.22-0.44	25.4	0.25	33.2-40.2	127	4.0-4.8	1.96
24	Crimped	0.22-1.76	25.4	0.25 × 5.6 <sup>a</sup> 0.38 × 0.63 <sup>a</sup> 0.41 × 0.25 <sup>a</sup>	33.2-40.2	127	4.0-4.8	1.96
18	Crimped	0.25-1.0	30-40	0.3	29.9-59.6	126-130	2.5-3.5	2.00-5.72
4	Hooked	0.5-1.5	60	0.8	93.8-97.1	215	4.0-6.0	2.84-4.58
5	Hooked	0.5-1.0	30	0.5	34	221	2.5-3.5	1.10-2.20
7	Hooked	0.5-1.0	30	0.5	20.6-33.4	197	2.8-3.6	1.34-2.00
5	Hooked	1.0	30-50	0.5	22.7-26	102-204	3.0	1.10-2.20
4	Crimped	0.5-2.0	25.4-38.1	0.2 × 2.3 <sup>a</sup>	49.3-54.8	80	3.75	1.77
80	-	0.22-2.0	25.4-60	0.25-0.8	20.6-97.1	80-221	2.5-6.0	1.10-5.72

Figura 2.57: Vigas de SFRC [49].

CONCLUSIONES:

El modelo de comportamiento a cortante propuesto en este artículo tiene una clara base teórica y puede aplicarse para piezas de hormigón reforzado con fibras de acero así como a otras piezas con hormigón reforzado con otro tipo de fibras. Sólo es necesario la realización de un ensayo de adherencia para las fibras en cuestión.

Al contrario que otros métodos, el modelo de comportamiento a cortante propuesto considera el mecanismo de adherencia entre las fibras y el hormigón con detalle y, con ello, se puede representar, de forma aproximada, el fallo por arranque (o fallo por pérdida de adherencia o *pull-out*) de las piezas compuestas por SFRC.

Si se compara con los ensayos experimentales procedentes de la literatura para paneles y vigas, se observa que el modelo capta el comportamiento a cortante de un modo razonable.

Se obtiene de los análisis de los resultados que la fracción de volumen óptima ( $V_f$ ) es del 1.5%.

**2.5.4. J. SUSETYO, P. GAUVREAU, and F.J. VECCHIO (2011) [4].**

El motivo de este trabajo es el de proveer resultados experimentales para enriquecer la base de resultados para el estudio y generación de modelos teóricos que caractericen la contribución de las fibras de acero a la resistencia a cortante del hormigón. Los estudios experimentales se llevan a cabo mediante paneles ya que este tipo de ensayo permite una mayor aproximación a las condiciones de tensiones de corte uniformes para ser impuestas en una superficie considerable sin ser alteradas por efectos de flexión. Se realizan comparaciones entre hormigón convencional y hormigón armado con fibras de acero (SFRC) y, con ello, se pueden evaluar varios aspectos como son: la tensión de stiffening, la tensión de reblandecimiento y el reblandecimiento por compresión. También se calibran factores que afectan a la resistencia a corte del hormigón debido a la presencia de fibras de acero como son: volumen de fibras utilizado, longitud de las fibras, resistencia a tracción de las fibras y la resistencia a compresión del hormigón.

Para la realización de este estudio, se ensayan 10 paneles de 890x890x70mm. Las características de los materiales que componen la matriz así como el armado y las fibras se resumen en las tablas de la figura 2.58.

**Table 1—Test matrix**

ID	Specified $f'_c$ , ksi (MPa)	Fiber content, %	Fiber type
C1C	7.25 (50)	—	—
C1F1V1	7.25 (50)	0.5	RC80/50-BN
C1F1V2	7.25 (50)	1.0	RC80/50-BN
C1F1V3	7.25 (50)	1.5	RC80/50-BN
C1F2V3	7.25 (50)	1.5	RC80/30-BP
C1F3V3	7.25 (50)	1.5	RC65/35-BN
C2C	11.60 (80)	—	—
C2F1V3	11.60 (80)	1.5	RC80/50-BN
C2F2V3	11.60 (80)	1.5	RC80/30-BP
C2F3V3	11.60 (80)	1.5	RC65/35-BN

**Table 2—Properties of conventional reinforcement**

Reinforcing bar type	$d_b$ , in. (mm)	$A_s$ , in. <sup>2</sup> (mm <sup>2</sup> )	$E_s$ , ksi (GPa)	$f_{ys}$ , ksi (MPa)	$\epsilon_{ys}$ , mε	$f_{us}$ , ksi (MPa)	$\epsilon_{us}$ , mε
D4	0.225 (5.72)	0.04 (25.81)	27,150 (187)	64.8 (447)	2.41	79.6 (549)	57.6
D8	0.319 (8.10)	0.08 (51.61)	32,590 (225)	80.1 (552)	2.58	93.9 (647)	45.4

**Table 3—Properties of fibers<sup>25</sup>**

Fiber type	$l_f$ , in. (mm)	$d_f$ , in. (mm)	$l_f/d_f$	$f_{uf}$ , ksi (MPa)
RC80/50-BN	1.97 (50)	0.024 (0.62)	81	152 (1050)
RC80/30-BP	1.18 (30)	0.015 (0.38)	79	334 (2300)
RC65/35-BN	1.38 (35)	0.022 (0.55)	64	160 (1100)

*Figura 2.58: Características de los materiales que componen los paneles [4].*

**CONCLUSIONES:**

Con elementos de hormigón armados con fibras de acero (SFRC) se obtienen valores de resistencia a corte y respuestas deformacionales (con características de control de fisura mejorada) comparables a elementos que contengan baja o mínima cantidad de armadura de cortante.

El volumen de fibras que se utilice tiene un efecto significativo en el comportamiento frente a cortante. Se requiere de un contenido de fibras alrededor del 1% para notar mejoras en términos de resistencia a cortante, deformación dúctil, abertura de fisura y separación entre fisuras. No obstante, se obtiene una leve mejora al pasar de un contenido de fibras del 1% al 1.5%, posiblemente debido a la saturación de fibras. Un contenido de fibras del 0.5% resulta insuficiente para garantizar una resistencia y deformación a cortante adecuadas.

El tipo de fibra también resulta un factor influyente. Los paneles que contienen fibras de corta longitud consiguen mayores resistencias a cortante y mayores valores de la tensión principal de tracción en el hormigón que los paneles que contienen fibras de larga longitud.

La resistencia a compresión del hormigón armado con fibras de acero no experimenta una mejora sustancial en comparación con el hormigón convencional.

La adición de fibras mejora, de forma significativa, la respuesta tensión-deformación de la tracción principal tras la fisuración del hormigón. Esto demuestra la capacidad de las fibras para transmitir tensiones de tracción a través de las fisuras.

La respuesta tensión-deformación de la compresión principal no se ve influenciada por la presencia de fibras.

**2.5.5. G. TIBERTI, F. MINELLI, G. A. PLIZZARI, and F. J. VECCHIO (2013) [70].**

En este artículo se describe una serie de resultados procedentes de un programa experimental realizado por la Universidad de Brescia (Italia) en colaboración con Universidad de Toronto (Canadá). En este programa experimental se estudia la formación y desarrollo de fisuras en estructuras de hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC) realizado con diferentes grados de resistencia del hormigón. Se llevan a cabo una serie de ensayos de tensión de stiffening variando la resistencia del hormigón, el ratio de armado, la fracción volumétrica de fibras y la geometría de las fibras. Por una parte se realizan 109 ensayos con hormigón de resistencia normal y, por otra, 59 ensayos con hormigón de alta resistencia. Los resultados de estas experiencias enfocados, principalmente, en la variación de la resistencia del hormigón y en las fibras se comparan con la formulación propuesta por el CEB Model Code 1978 [71] y el *fib* Model Code 2010 [72]. Finalmente, estos resultados experimentales pueden ser usados en mejoras para la formulación para separación de fisuras, abertura de fisura y el comportamiento de tensión de stiffening en SFRC.

En la figura 2.59 se muestra el tipo de ensayo.

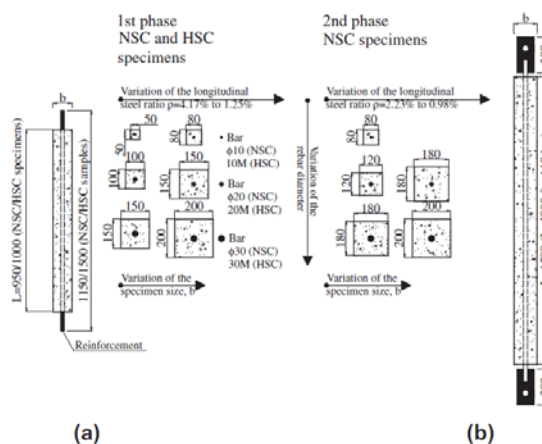


Figura 2.59: Geometría y detalles de armado de las probetas para el ensayo de tracción uniaxial [70].

En las tablas de la figura 2.60 se muestran las características de los materiales que componen las probetas para los ensayos:

**Table 1**  
Properties of steel reinforcing bars.

	Rebar	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$d_b$ (mm)	$E_s$ (GPa)	$f_y$ (MPa)	$\epsilon_{sh}$ ( $\times 10^{-3}$ )	$f_{ult}$ (MPa)	$\epsilon_{ult}$ ( $\times 10^{-3}$ )
Rebars used in NSC specimens	Ø10	78	10	198	522	29.7	624	NA
	Ø20	314	20	198	515	20.2	605	NA
	Ø30-1 <sup>†</sup>	707	30	187	554	15.8	672	NA
	Ø30-2 <sup>†</sup>	707	30	182	484	17.9	604	NA
Rebars used in HSC specimens	10M	100	11.3	199	442	27.0	564	164.0
	20M-1 <sup>†</sup>	300	19.5	194	456	21.2	592	144.2
	20M-2 <sup>†</sup>	300	19.5	188	525	17.3	653	111.6
	30M	700	29.9	187	376	11.0	558	177.0

<sup>†</sup>The 20M and Ø30 bars came from two different production heats. NA is not available.

**Table 2**  
Mechanical properties of concrete, fiber contents and free shrinkage strain measurements.

Batch ID	$f_{cm}$ (MPa)	$f_{ctm}$ (MPa)	Volume fraction of steel fibers $V_f$					$V_{f, tot}$ (%)	$\epsilon_{c, shr} \times 10^{-6}$ (-)	
			Fibers 30/0.62 (%)	Fibers 13/0.20 (%)	Fibers 30/0.38 (%)	Fibers 30/0.55 (%)	Fibers 50/1.05 (%)			
1st Phase	NSC	0 Plain	40.5	3.71	-	-	-	-	-	NA
		0.5M	39.7	3.37	0.5	-	-	-	0.5	NA
		1M	25.4	2.60	1	-	-	-	1	NA
		1M <sup>†</sup>	36.4	3.50	1	-	-	-	1	NA
		1M+m	43.3	2.81	0.5	0.5	-	-	1	NA
	HSC	0 Plain	91.4	4.93	-	-	-	-	-	324
		FRC1	75.7	4.55	-	-	0.5	-	0.5	555
		FRC2	52.8	3.94	-	-	1	-	1	740
		FRC3	56.8	3.96	-	-	1.5	-	1.5	800
		FRC4	41.7	3.28	-	-	-	1.5	1.5	733
2nd Phase	NSC	0 Plain	47.2	3.50	-	-	-	-	0	
		0.5M	40.8	3.35	0.5	-	-	-	0.5	0
		1M	27.4	2.85	1	-	-	-	1	0

<sup>†</sup> The series 1M was repeated. NA is not available.

**Table 3**  
Characteristics of fibers employed.

Fiber ID	Type of steel	Shape	$f_{uf}$ (MPa)	$l_f$ (mm)	$\varnothing_f$ (mm)	$l_f/\varnothing_f$ (-)	Batch ID
30/0.62	Carbon	Hooked-end	1270	30	0.62	48.39	0.5M, 1M, 1M <sup>†</sup> , 1M+m
13/0.20	High carbon	Straight	2000	13	0.20	65.00	1M+m
30/0.38	High carbon	Hooked-end	2300	30	0.38	78.95	FRC1, FRC2, FRC3
30/0.55	Carbon	Hooked-end	1100	30	0.55	54.55	FRC4
50/1.05	Carbon	Hooked-end	1100	50	1.05	47.62	FRC5

*Figura 2.60: Características de los materiales que componen las probetas [70].*

**CONCLUSIONES:**

El uso de hormigón de alta resistencia (HSC) conduce a una reducción de la separación media entre fisuras con respecto al hormigón de resistencia normal (NSC).

La etapa de estabilización de las fisuras parece no verse influenciada por la mejora de la dureza (en piezas con SFRC) ni por la variación del grado de resistencia del hormigón.

El uso de SFRC tiene una clara influencia en el comportamiento de las barras de tensión (la probetas realizadas de hormigón y barra de acero) en los estados límite de servicio. Se reduce la abertura de fisura y esto da como resultado patrones de fisuración en los cuales el espacio entre fisuras es más reducido.

El SFRC rigidiza la respuesta post-fisura de las piezas de hormigón y esto es efectivo en la disminución de las deflexiones de las estructuras.

Los modelos investigados en este artículo (MC 1978 y MC 2010) para hormigón armado tradicional no son adecuados para la predicción de de la separación media entre fisuras en hormigones de alta resistencia (HSC).

Son necesarias fórmulas mejoradas que incluyan el efecto de la resistencia a compresión tanto en hormigón que contenga fibras como en hormigón que no las contenga.

Son necesarios más estudios para llegar a entender la relación entre la dureza del SFRC y el radio de armado y para mejorar los modelos analíticos con el objetivo de predecir mejor la separación media entre fisuras.

### 2.5.6. J. R. DELUCE, S. C. LEE, and F. J. VECCHIO (2014) [73].

En este artículo se propone un modelo nuevo para el cálculo de la separación entre fisuras y la abertura de fisura en hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC). El modelo tiene en cuenta el efecto generado por la consideración de parámetros referentes a las fibras y a las barras de armado. Las predicciones obtenidas del modelo se comparan con los resultados experimentales de 17 probetas de hormigón armado convencional (RC) y 53 probetas de SFRC sometidas a tracción uniaxial (probetas convencionales para el ensayo de tracción directa uniaxial) procedentes de la literatura [76-79]. Se observa que el modelo propuesto predice la separación entre fisuras y la abertura de fisura del SFRC con una precisión razonable y completa ciertos modelos de SFRC actuales. Además, este modelo se extrapola a condiciones de tensión biaxial para facilitar el análisis de elementos de SFRC como son los paneles sometidos a cortante en la literatura [48]. En esta situación, el modelo también predice resultados con suficiente precisión.

En este artículo, se realiza la comparación del modelo propuesto para la obtención de la separación media de fisura con el de Dupont y Vandewalle [74] y el de Moffat [75].

- Dupont y Vandewalle:

$$s_m = 50 + 0.25k_1k_2 \frac{d_b}{\rho_{s,eff}} \left( \frac{50}{l_f/d_f} \right) \quad (2.105)$$

donde  $50/(l_f/d_f) \leq 1$ ;  $k_1$  es un factor que tiene en cuenta la adherencia de las barras de armado, tomando 0.8 para barras de armado deformadas y 1.6 para barras regulares;  $k_2$  es un factor que tiene en cuenta los efectos del gradiente de deformación, obtenido como  $k_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2\varepsilon_1$ , donde  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  se corresponden con la deformación por tracción mayor y la menor, respectivamente;  $d_b$  y  $\rho_{s,eff}$  son el diámetro convencional de las barras de armado y la densidad de armado, respectivamente;  $l_f$  y  $d_f$  son la longitud y el diámetro de las fibras, respectivamente.

- Moffat:

$$s_m = 50 + 0.25k_1k_2 \frac{d_b}{\rho_{s,eff}} \left( 1 - \frac{f_{res}}{f_{cr}} \right) \quad (2.106)$$

donde  $f_{res}$  es la tensión residual en el hormigón tras la fisuración y  $f_{cr}$  es la tensión de fisuración en el hormigón.

La fórmula propuesta para la separación media entre fisuras por el modelo de los autores de este artículo es:

- Condición de deformación uniaxial (basada en el CEB-FIP 1978 [71]):

$$s_m = 2 \left( c_a + \frac{s_b}{10} \right) k_3 + \frac{k_1 k_2}{s_{mi}} \quad (2.107)$$

donde  $s_{mi}$  es el parámetro de efectividad del armado obtenido como:

$$s_{mi} = \frac{\rho_{s,eff}}{d_b} + k_f \frac{\alpha_f V_f}{d_f} \quad (2.108)$$

donde  $\alpha_f$  es el factor de orientación de las fibras,  $V_f$  es la fracción volumétrica de las fibras,  $k_f = l_f/50d_f \leq 1$ ; ;  $k_1$  es un factor que tiene en cuenta la adherencia de las barras de armado, tomando 0.4 para barras de armado deformadas y 0.8 para barras regulares y tendones;  $k_2$  es un factor que tiene en cuenta los efectos del gradiente de deformación, obtenido como  $k_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2\varepsilon_1$ , donde  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  se corresponden con la deformación por tracción mayor y la menor, respectivamente;  $k_3$  es un factor que tiene en cuenta el contenido de fibras obtenido como:

$$k_3 = 1 - \frac{\min(V_f, 0.015)}{0.015} \cdot \left( 1 - \frac{1}{k_f} \right) \quad (2.109)$$

y el parámetro  $s_b$  representa la separación efectiva de las barras de armado longitudinal:

$$s_b = 0.5 \sqrt{\frac{\pi d_b^2}{\rho_{s,eff}}} \quad (2.110)$$

- Condición de deformación biaxial:

Para este caso las ecuaciones (108) y (110) se evalúan con respecto a los ejes principales de tracción. Estos valores después se usan en la expresión (107). La separación efectiva de las barras de armado longitudinal en la dirección principal de tracción se calcula como:

$$s_{b1} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i \frac{4\rho_{s,i}}{\pi d_{b,i}^2} \cos^4 \theta_i}} \quad (2.111)$$

donde  $i$  representa la capa de armado en la dirección dada;  $\rho_{s,i}$ ,  $d_{b,i}$  y  $\theta_i$  son la densidad de armado, el diámetro de la barra de armado y la orientación del armado  $i$ , respectivamente. El parámetro de efectividad del armado para cada capa de armado  $i$  se puede obtener como:

$$s_{mi1} = \sum_i \frac{\rho_{s,i}}{d_{b,i}} \cos^2 \theta_i + k_f \frac{\alpha_f V_f}{d_f} \quad (2.112)$$

Estos parámetros se sustituyen en la expresión (107) para obtener la separación media entre fisuras.

CONCLUSIONES:

Para calcular de forma correcta el comportamiento estructural de piezas fabricadas con SFRC es importante ser capaz de estimar las condiciones medias de las fisuras. Esto es debido a que la tensión de tracción referida a las fibras de acero es directamente dependiente de la abertura de fisura mientras que la tensión de tracción del armado convencional se obtiene a partir de la deformación media de tracción. Como consecuencia de esto, es necesario la obtención de un modelo de separación de fisuras para proporcionar la relación entre la tensión media de tracción y la abertura de fisura. No obstante, tras el análisis de los resultados experimentales relacionados con piezas fabricadas con SFRC sometidos a tracción, se descubre que los modelos desarrollados hasta el momento en la literatura no aportan predicciones con suficiente precisión.

Para solucionar esta deficiencia, se lleva a cabo el desarrollo de un modelo que tenga en cuenta parámetros como la densidad de armado, el tamaño de las barras de armado, el contenido de fibras, la longitud de las fibras y el diámetro de las fibras. Este modelo se ajusta mejor a los resultados experimentales que los modelos precedentes. Además, como la relación entre las aberturas medias de fisura y la abertura máxima de fisura se puede asumir como lineal, se propone una fórmula empírica para el cálculo de la máxima abertura media con un factor de conversión en función del volumen de fibras y del ratio longitud de fibras/diámetro de fibras:

$$w_{cr,max} = \left(1.7 + 3.4 \frac{V_f l_f}{d_f}\right) w_{cr,avg} \quad (2.113)$$

donde:

$$w_{cr,avg} = S_m \varepsilon_{t,avg} \quad (2.114)$$

Esto permite el cálculo de la abertura máxima de fisura a partir de la abertura de fisura media obtenida por el modelo propuesto de separación media de fisuras. Aunque se observa un cierto grado de dispersión, se considera que la relación propuesta predice la abertura máxima de fisura con una precisión aceptable.

Al extender este modelo a condiciones de deformación biaxiales se observa, al comparar con paneles sujetos a condiciones de cortante puro, que el modelo propuesto predice la separación media entre fisuras de los paneles con SFRC con aceptable precisión.

Se recomienda un mayor estudio para la determinar la aplicación de este modelo a otro tipo de fibras como son fibras sintéticas.



**2.5.7. M. ISLAM, S. KHATUN, R. U. ISLAM, J. F. DOLA, M. HUSSAN and A. SIDDIQUE (2014) [80].**

En este artículo se lleva a cabo un modelización por elementos finitos y una validación experimental del comportamiento a cortante de piezas de hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC).

Se usan fibras con un cociente longitud de fibra/diámetro de fibra bajo. Se usan dos tipos de áridos para el SFRC y hormigón normal que se usa para la fabricación de las vigas objeto de ensayo: piedra y ladrillo.

La modelización por elementos finitos se lleva a cabo por medio del software ANSYS 10.0 con el elemento finito 3D con 8 grados de libertad (los tres desplazamientos x, y, z) SOLID65 (ver figura 2.61).

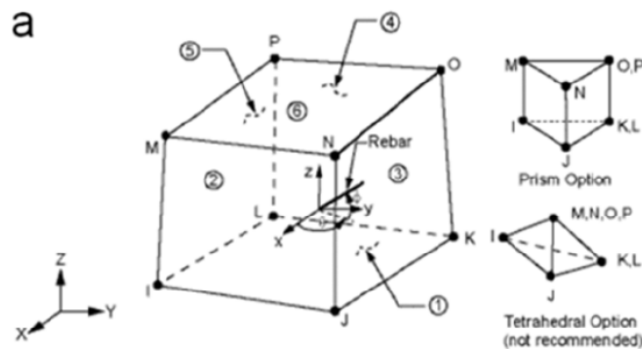


Figura 2.61: Geometría del elemento finito tipo SOLID65 del software ANSYS 10.0 [80].

La campaña experimental se lleva a cabo a través de tres tipos distintos de vigas: cortante simple, doble cortante y cortante-flexión. Todas las probetas se ensayan en una máquina de 1000 KN y los datos de deformaciones se obtienen a partir de una técnica de correlación de imagen usando imágenes de alta definición y video-clips de alta velocidad.

Los modelos de elementos finitos de las vigas se validan con los resultados tensión-deformación experimentales optimizando el coeficiente de Poisson, el módulo de elasticidad, la capacidad tensional y el comportamiento tensión-deformación. El modelo de elementos finitos muestra la misma respuesta estructural y el mismo modo de fallo que se obtiene en la fase experimental (ver figura 2.62).

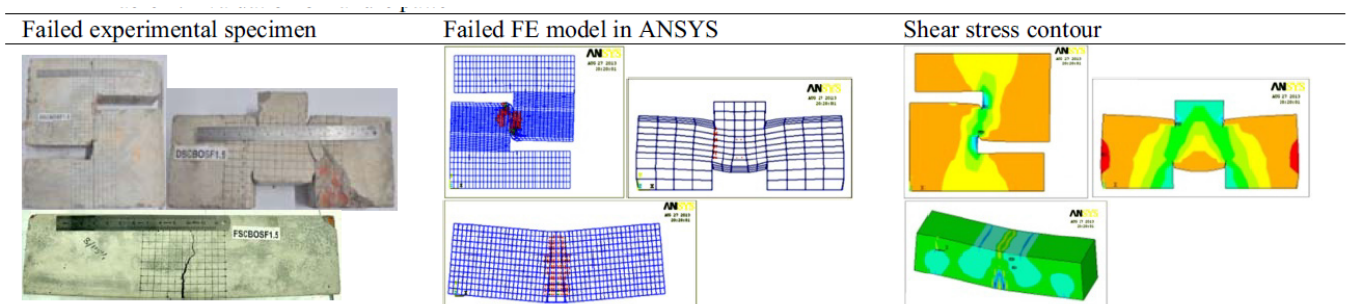


Figura 2.62: Vigas experimentales, modelización con elementos finitos y resultados [80].

**CONCLUSIONES:**

Se mejora la capacidad de resistencia a cortante entre un 30 y un 170% usando fibras de acero con un ratio volumétrico del 1.5%. Con ello se consigue evitar una rotura frágil.

Los modos de rotura de las probetas del ensayo experimental validan de forma similar los obtenidos con el modelo de elementos finitos.

Se muestra la capacidad de los modelos de elementos finitos llevados a cabo en este trabajo para predecir la distribución del cortante del SFRC, el cual, asegura la fiabilidad del modelo.

**2.5.8. F. SOLTANZADEH, J. A. O. BARROS and R.F.C. SANTOS (2015) [81].**

En este trabajo se lleva a cabo la investigación del hormigón autocompactable armado con fibras de acero (HPFRC). Este tipo de hormigón presenta unas características reológicas y mecánicas únicas. En este artículo se lleva a cabo un diseño innovador de la dosificación del hormigón para el desarrollo de un alto rendimiento con una relativamente alta adición de fibras de acero. De este modo se evalúan las propiedades materiales del hormigón y se caracteriza el comportamiento estructural de dicho hormigón bajo esfuerzos de compresión, flexión y cortante. Se pretende que este estudio clarifique la contribución significativa de las fibras de acero en la resistencia a cortante de los elementos de hormigón. Además, también se lleva a cabo una modelización con elementos finitos.

Para el desarrollo de la campaña experimental, la caracterización del comportamiento frente a cortante se llevan a cabo con una serie de probetas diseñadas con ciertas modificaciones tomando como base las probetas tipo *push-off*. Para evaluar la influencia de la orientación y la dispersión de las fibras del HPFRC, las probetas mencionadas se extraen de diferentes localizaciones dentro de elementos prismáticos de 150x150x600mm<sup>3</sup>. Las probetas a cortante se caracterizan en cuatro grupos atendiendo a su localización en el elemento prismático del cual se extraen (ver figura 2.63). En la figura 2.63 se puede observar la representación esquemática de la probeta tipo doble-cortante diseñada y las características del ensayo. Los resultados de este ensayo junto con el análisis de la localización de las probetas al extraerse del prisma, pueden constituir una fuente suficiente de información para la obtención del comportamiento a cortante del material. El ensayo de cortante se prepara con la intención de obtener la relación carga-deslizamiento en los planos con las muescas o entallas, así como la abertura de fisura durante el proceso de carga.

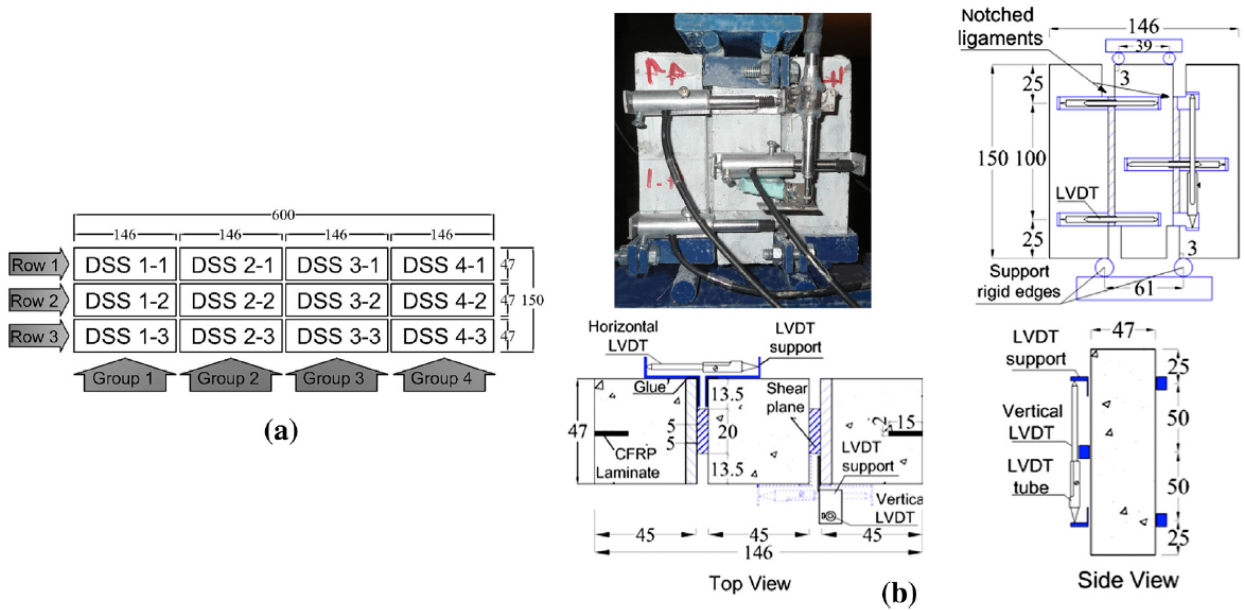


Figura 2.63: (a) localización de la probeta dentro del elemento prismático, (b) geometría y configuración de carga de las probetas para el ensayo de cortante (dimensiones en mm) [81].

La modelización del ensayo experimental se realiza mediante un modelo de elementos finitos basado en los modelos de fisuración difusa multidireccional. Este modelo incluye diferentes aproximaciones para modelar el comportamiento a cortante del hormigón fisurado. Éste se describe con detalle en [82]. La principal característica es que la matriz constitutiva  $D$  del hormigón fisurado tiene dos componentes: uno correspondiente al modo de fractura I (normal) y el otro correspondiente al modo de fractura II (cortante) de cada fisura. La propagación de la abertura de fisura se simula con un diagrama cuadrilátero que se representa en la figura 2.64. En esta figura también se representa la tensión de reblandecimiento a cortante en la fisura frente a la distorsión tangencial en la fisura.

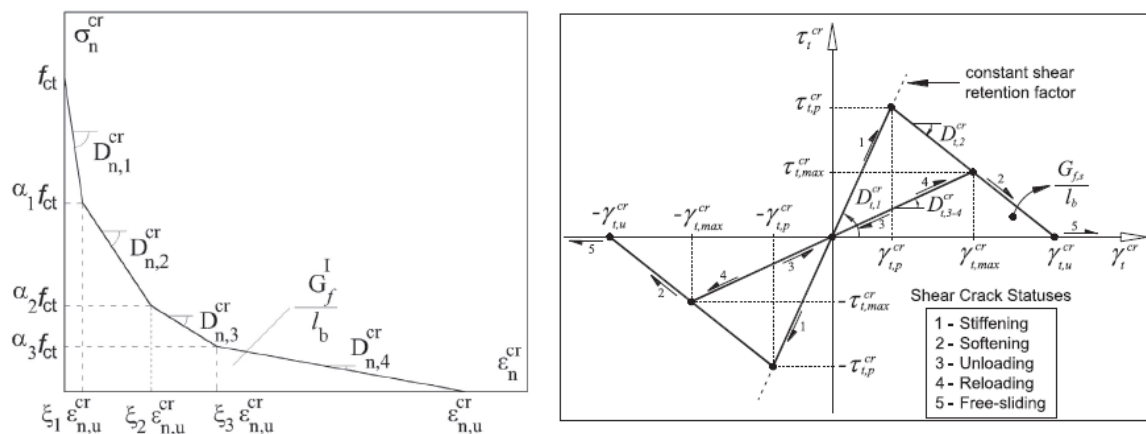


Figura 2.64: Diagramas para el modelado (a) del modo de rotura, (b) deformacional [81].

En las figuras 2.65 y 2.66 se muestra el tipo de elemento finito (cuadrilátero de 4 nodos con 2x2 y 2x1 puntos de integración de Gauss), el mallado que se usa y como se modelan las condiciones de contorno del ensayo.

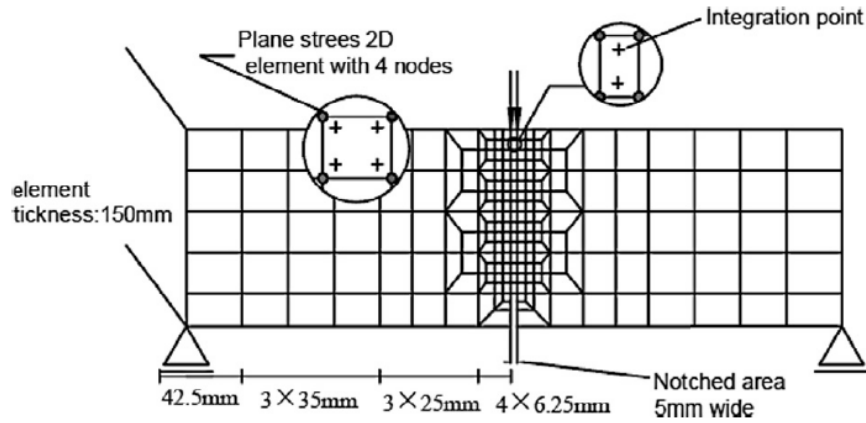


Figura 2.65: Elemento finito utilizado y mallado del ensayo [81].

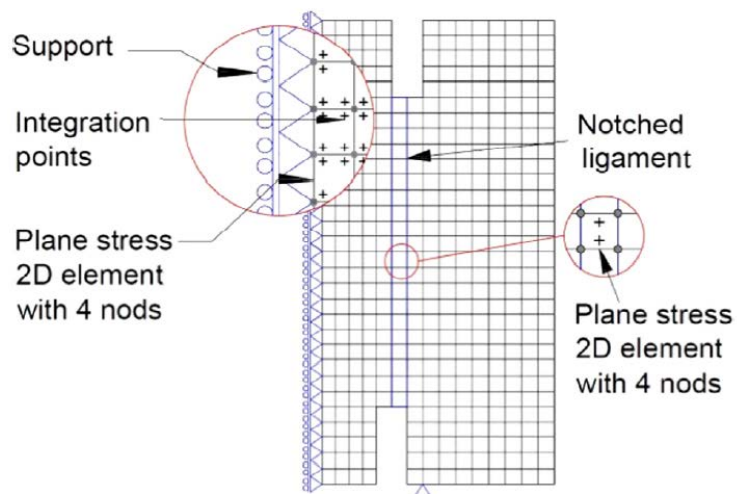


Figura 2.66: Modelado de las condiciones de contorno del ensayo [81].

CONCLUSIONES:

En cuanto a las conclusiones referentes al cortante, se obtiene que el material (HPFRC) presenta una alta capacidad de disipación de energía de cortante.

La alta efectividad del material HPFRC en términos de capacidad resistente a cortante y rigidez es tan buena como la capacidad de limitar la abertura de fisura máxima. De este modo se obtienen buenos resultados en cuanto a durabilidad.

## Capítulo 3: Programa experimental.

En el capítulo 2 de este trabajo se describen varias tipologías de ensayos característicos para el estudio del esfuerzo cortante. Algunos de ellos son: paneles, ensayos tipo *push off*, ensayos tipo *pull-off* y vigas.

Para la campaña experimental que se lleva a cabo en este trabajo se usa el ensayo tipo *push-off*. Se trata de un tipo de ensayo de dimensiones relativamente pequeñas, barato, fácil de fabricar y no necesita de piezas excesivamente complejas para su uso y evaluación. Consta de dos bloques en L cuya zona de contacto se conoce como plano de cortante. Esta forma característica del ensayo *push-off* permite la generación de un cortante directo en el plano de cortante con la aplicación de una compresión, tal y como se ve en la figura 3.1.



*Figura 3.1: Dispositivo experimental.*

Existen dos clases de ensayos tipo *push-off* (ver figura 3.2):

- Con fisuración previa a lo largo del plano de cortante (ver figura 3.2 izquierda).
- Sin fisuración previa a lo largo del plano de cortante (ver figura 3.2 derecha).

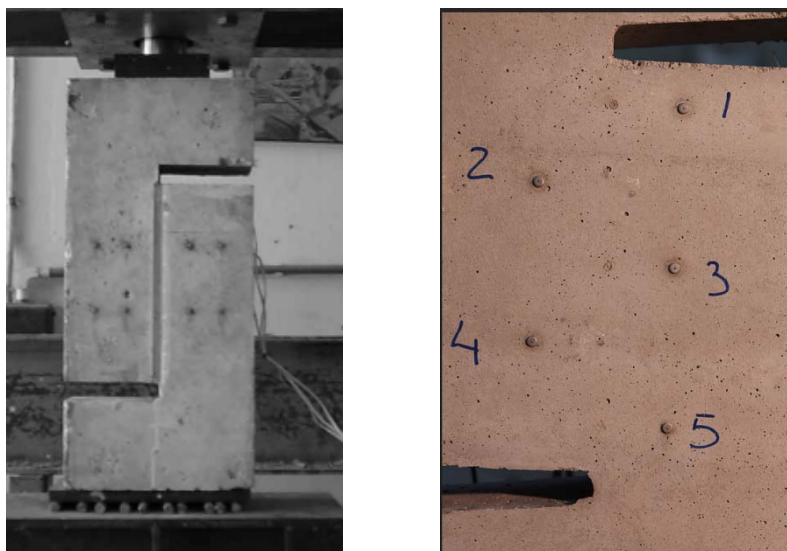


Figura 3.2: Push-off: (izquierda) con fisuración previa, (derecha) sin fisuración previa en el plano de corte.

El comportamiento en el primer caso viene gobernado, en gran parte, por las características corte-deslizamiento del plano de cortante fisurado. La resistencia a cortante en este caso se ve afectada por el engranamiento de áridos, el efecto pasador de las armaduras perpendiculares al plano de corte y por las constricciones normales al plano de corte. El fallo final se produce a lo largo de la fisura previamente realizada.

En contraste, el fallo por cortante en probetas sin fisuración previa ocurre tras la formación de numerosas fisuras en una dirección inclinada desde el plano de corte. El fallo final, normalmente, se produce debido al aplastamiento del hormigón en las bielas de compresión formadas aproximadamente paralelas a la dirección de las fisuras. La compresión que se produce entre las bielas de compresión y la tracción que transmiten las armaduras, tanto las que cruzan el plano de corte como las paralelas a éste, originan un mecanismo resistente de celosía.

En este capítulo se describen los parámetros que se pretende analizar y la campaña experimental que forma parte del estudio. También se explica la configuración adoptada para el ensayo, las características de los equipos que se usan para la aplicación de las cargas y las características de los instrumentos utilizados para la toma de datos. Por último, se aborda la descripción de los materiales empleados así como el proceso de ensayo.

### 3.1. Desarrollo del programa experimental.

El programa experimental planteado en este proyecto consiste en la preparación de 10 probetas tipo *push-off* sin fisuración previa para ser ensayadas frente a cortante. Estas probetas están fabricadas con diferentes hormigones: 4 probetas de hormigón armado, 4 probetas de hormigón armado reforzado con fibras de acero y 2 probetas de hormigón sólo con fibras de acero.

En la tabla 3.1 se resume la propuesta de ensayos que se plantea:

Tabla 3.1: Propuesta de ensayos.

Tipo de ensayo	Arm. Transv. + Contenido Fibras	Núm. ensayos
Tipo A (HA)	2 $\phi$ 8	2
	3 $\phi$ 8	2
Tipo B (HRF)	60 Kg/m <sup>3</sup> fibras	2
Tipo C (HARF)	2 $\phi$ 8 + 60 Kg/m <sup>3</sup> fibras	2
	3 $\phi$ 8 + 60 Kg/m <sup>3</sup> fibras	2
Total de ensayos		10

En las probetas de tipo A se quiere analizar el comportamiento a cortante de elementos de hormigón armado con presencia de armadura transversal (HA).

En las probetas de tipo B se pretende estudiar el comportamiento de elementos de hormigón reforzado con fibras de acero (HRF).

En las probetas del tipo C se pretende estudiar el comportamiento de elementos de hormigón armado con presencia de armadura transversal y, además, con fibras de acero (HARF). Se trata de un ensayo tipo A + B.

### 3.2. Descripción de las probetas utilizadas en el ensayo *push-off*.

En este apartado se tratan los materiales, dimensiones y armado de las probetas así como su proceso de fabricación.

#### 3.2.1. Materiales.

Para la generación de las probetas se realizan cinco dosificaciones: J1-1, J1-2, J2-1, J2-2 y J3-1. A continuación se muestra en la tabla 3.2 la composición de cada una de ellas.

Tabla 3.2: Dosificaciones.

	J1-1	J1-2	J2-1	J2-2	J3-1
tipo de cemento	CEM II/B-V 42.5 N	CEM II/B-V 42.5 N	CEM II/B-V 42.5 N	CEM II/B-V 42.5 N	CEM II/B-V 42.5 N
contenido de cemento (kg/m <sup>3</sup> )	300	300	300	300	300
relación agua-cemento (a/c)	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63
arena machacada (kg/m <sup>3</sup> )	954	954	1220	1220	1220
filler (kg/m <sup>3</sup> )	0	0	0	0	0
grava 7/12 (kg/m <sup>3</sup> )	401	969	690	690	690
grava 12/20 (kg/m <sup>3</sup> )	568	0	0	0	0
tamaño máximo del árido (mm)	20	12	12	12	12
fibras RC-65/35-BN (kg/m <sup>3</sup> )	0	0	50	50	50
aditivo 5720 (kg/m <sup>3</sup> )	0	1.5	3	3	3.55

De cada dosificación se obtienen dos probetas. Cada par de probetas se representa por un identificador según se muestra en la tabla 3.3. Por ejemplo, de la dosificación J1-1 se obtienen dos probetas identificadas como Z-HA-3FI8-NF, donde Z-HA-3FI8-NF-1 se corresponde con la primera probeta y Z-HA-3FI8-NF-2 se corresponde con la segunda. Se procede de forma análoga con las demás dosificaciones.

Tabla 3.3: Relación entre probetas y la dosificación que las compone

Identificador	Dosificación
Z-HA-3FI8-NF	J1-1
Z-HA-2FI8-NF	J1-2
Z-HF-2FI8-NF	J2-1
Z-HF-3FI8-NF	J2-2
Z-HA-0FI8-NF	J3-1

Donde:

- Identificador: la columna identificador hace referencia al nombre de la probeta:

Z: se refiere a la forma en Z de la probeta característica del ensayo *push-off*.

HA ó HF: hace referencia al tipo de armado del hormigón en el alma de la probeta: Hormigón Armado u Hormigón con Fibras.

nFI8: se refiere al número de cercos de diámetro 8mm colocados en el alma de la probeta perpendiculares a la dirección de aplicación de la carga. En este caso se usan 3 cercos, 2 cercos o ningún cerco.

NF: significa No Fisurado. Es decir, la probeta no se encuentra fisurada antes de la realización del ensayo (no hay prefisuración).



1 ó 2: para cada cuantía de cercos se realizan dos probetas. Estos números hacen referencia al ordinal dentro de cada cuantía.

- Dosificación: hace referencia a la dosificación de la que proviene cada probeta. Como ya se ha dicho anteriormente, hay cinco dosificaciones posibles: J1-1, J1-2, J2-1, J2-2 y J3-1.

Las fibras que se utilizan para la formación del hormigón son fibras del tipo "Dramix RC-65/35-BN" de la marca Bekaert, cuyas características se detallan en la siguiente tabla (ver tabla 3.4 y figura 3.3):

Tabla 3.4: Características de las fibras tipo "Dramix RC-65/35-BN"

Propiedades	Fibras Dramix RC 65/35 BN
longitud (mm)	35
diámetro (mm)	0.55
esbeltez	64
fibras/kg	14500
revestimiento	no
resistencia a tracción (N/mm <sup>2</sup> )	1100



Figura 3.3: Fibras tipo "Dramix RC-65/35-BN"

El acero que se utiliza para armar es un acero B500S (ver figura 3.4):

- Resistencia elástica del acero:  $f_y = 554.086$  MPa
- Resistencia última del acero:  $f_u = 641.849$  MPa
- Módulo de elasticidad del acero:  $E_s = 178765$  MPa.

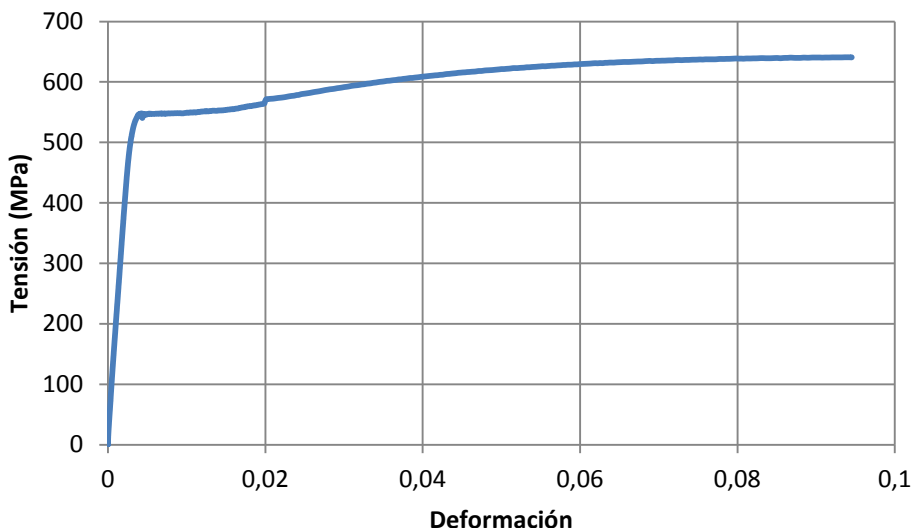


Figura 3.4: Diagrama tensión-deformación del acero B500S que se utiliza para armar

### 3.2.2. Propiedades del hormigón.

#### 3.2.2.1. Resistencia a compresión según UNE 83507 (2004) [85].

Para identificar las propiedades del material para cada uno de los hormigones, se realizan los ensayos de compresión según la norma UNE 83507 (2004) [85].

Para la obtención de la resistencia en la probeta cilíndrica a partir de la cúbica, se ha aplicado el criterio que aparece en el art 86.3.2 de la EHE-08. aplicable a probetas cúbicas de 10 cm de lado y tamaños máximos de árido inferiores a 12mm.

- Dosificación J1-1:

Se ensayan 2 probetas cúbicas de 100x100x100mm.

Tabla 3.5: Resultados del ensayo de resistencia a compresión simple para las probetas fabricadas con la dosificación J1-1.

Probeta	b1 (mm)	b2 (mm)	h (mm)	Carga Rotura (kN)	Resistencia a compresión simple (MPa)	
					Cúbica	Cilíndrica
J1-1-1	101.00	103.00	100.00	412.20	39.62	35.66
J1-1-2	99.00	104.00	101.00	335.60	32.60	29.34
				Media	36.11	32.50

Aunque, en este caso, el valor de la resistencia de las probetas cilíndricas se trata de un valor estimativo ya que el tamaño máximo de árido en esta dosificación es de 20 mm e incumple el requisito para aplicar el coeficiente de conversión de probetas cúbicas a cilíndricas de la EHE-08.

- Dosificación J1-2:

Se ensayan 4 probetas cúbicas de 100x100x100 mm.

*Tabla 3.6: Resultados del ensayo de resistencia a compresión simple para las probetas fabricadas con la dosificación J1-2.*

Probeta	b1 (mm)	b2 (mm)	h (mm)	Carga Rotura (kN)	Resistencia a compresión simple (MPa)	
					Cúbica	Cilíndrica
J1-2-1	100.80	103.80	102.50	409.80	39.17	35.25
J1-2-2	100.10	102.20	102.00	425.80	41.62	37.46
J1-2-3	100.00	103.00	101.90	383.10	37.19	33.47
J1-2-4	100.20	103.00	102.20	432.90	41.95	37.75
				<b>Media</b>	<b>40.39</b>	<b>36.35</b>

-Dosificación J2-1:

Se ensayan 4 probetas cúbicas de 100x100x100 mm.

*Tabla 3.7: Resultados del ensayo de resistencia a compresión simple para las probetas fabricadas con la dosificación J2-1.*

Probeta	b1 (mm)	b2 (mm)	h (mm)	Carga Rotura (kN)	Resistencia a compresión simple (MPa)	
					Cúbica	Cilíndrica
J2-1-1	100.00	100.50	99.90	331.40	32.98	29.68
J2-1-2	100.30	102.00	100.00	340.50	33.28	29.95
J2-1-3	100.00	106.00	100.20	324.90	30.65	27.59
J2-1-4	100.00	105.30	100.20	314.20	29.84	26.85
				<b>Media</b>	<b>33.13</b>	<b>29.82</b>

- Dosificación J2-2:

Se ensayan 8 probetas cúbicas de 100x100x100 mm.

*Tabla 3.8: Resultados del ensayo de resistencia a compresión simple para las probetas fabricadas con la dosificación J2-2.*

Probeta	b1 (mm)	b2 (mm)	h (mm)	Carga Rotura (kN)	Resistencia a compresión simple (MPa)	
					Cúbica	Cilíndrica
J2-2-1	100.50	102.00	100.50	393.50	38.39	34.55
J2-2-2	100.10	104.50	101.40	383.50	36.66	33.00
J2-2-3	100.20	102.80	101.70	357.60	34.72	31.24
J2-2-4	100.20	102.60	100.30	343.90	33.45	30.11
J2-2-5	100.90	101.00	100.80	378.60	37.15	33.44
J2-2-6	100.20	101.20	101.00	319.00	31.46	28.31
J2-2-7	100.00	100.80	101.00	335.80	33.31	29.98
J2-2-8	100.10	100.30	101.60	305.40	30.42	27.38
				<b>Media</b>	<b>37.52</b>	<b>33.77</b>

- Dosificación J3-1:

Se ensayan 4 probetas cúbicas de 100x100x100 mm.

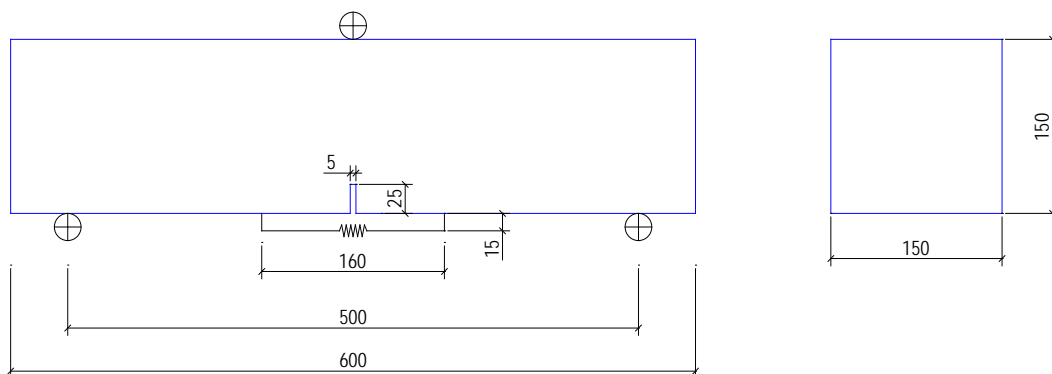
Tabla 3.9: Resultados del ensayo de resistencia a compresión simple para las probetas fabricadas con la dosificación J3-1.

Probeta	b1 (mm)	b2 (mm)	h (mm)	Carga Rotura (kN)	Resistencia a compresión simple (MPa)	
					Cúbica	Cilíndrica
J3-1-1	100.00	100.00	100.00	339.40	33.94	30.55
J3-1-2	100.00	100.00	100.00	349.14	34.91	31.42
J3-1-3	100.00	100.00	100.00	354.30	35.43	31.89
J3-1-4	100.00	100.00	100.00	359.50	35.95	32.36
				Media	34.43	30.98

### 3.2.2.2. Ensayo a flexo-tracción según UNE-EN 14651 (2007) [86].

Este ensayo permite medir la resistencia a flexo-tracción del hormigón reforzado con fibras de acero. Además, permite determinar los valores del límite de proporcionalidad y de la resistencia residual.

Esta norma se aplica a probetas prismáticas con entalla. La probeta se ensaya con carga centrada y controlando la velocidad de apertura de fisura (ver figuras 3.5 y 3.6)



Unidades en mm

Figura 3.5: Geometría probetas prismáticas para el ensayo de flexo-tracción.

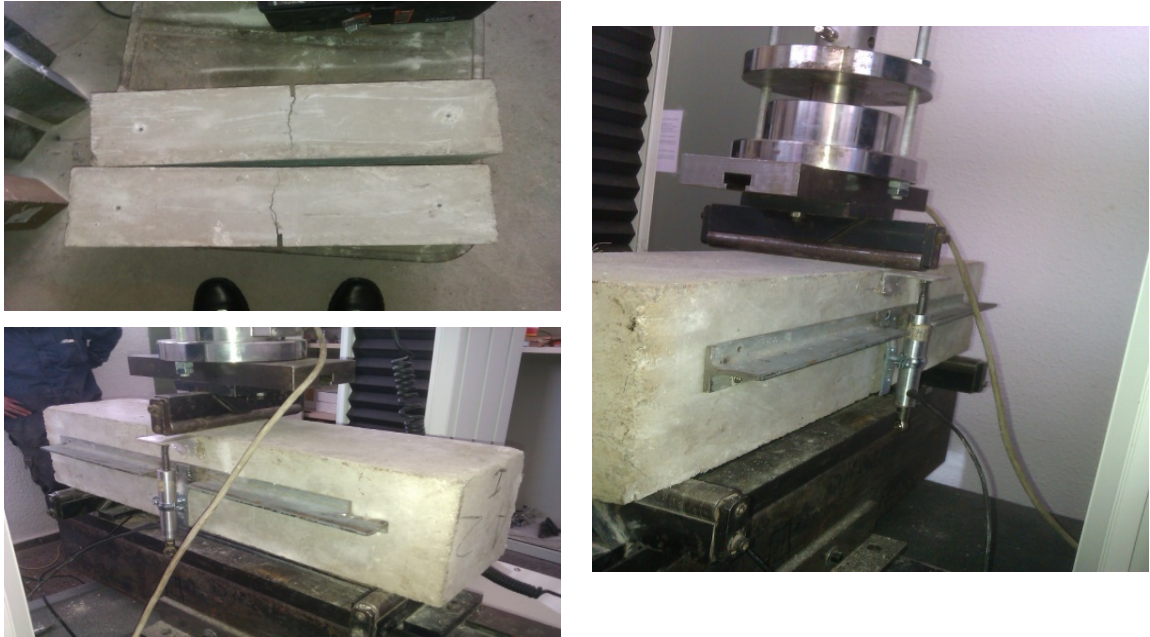


Figura 3.6: Imágenes del ensayo a flexo-tracción.

Las curvas medias carga-abertura de fisura (CMOD) experimentales para las probetas prismáticas sometidas a este ensayo usando las dosificaciones J2-1, J2-2 y J3-1, se muestran en las figuras 3.7, 3.8 y 3.9 , respectivamente. Para cada dosificación se han ensayado dos probetas (A y B) y se ha obtenido el valor medio.

### Dosificación J2-1

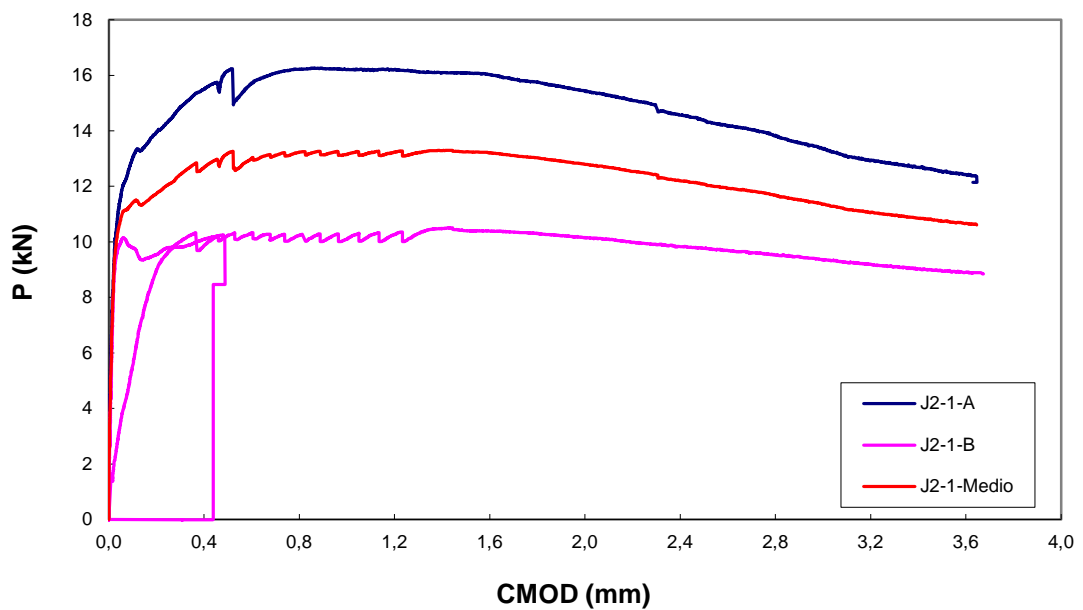


Figura 3.7: Curvas medias carga-abertura de fisura (CMOD) experimentales de las probetas J2-1-A, J2-1-B y su valor medio.

### Dosificación J2-2

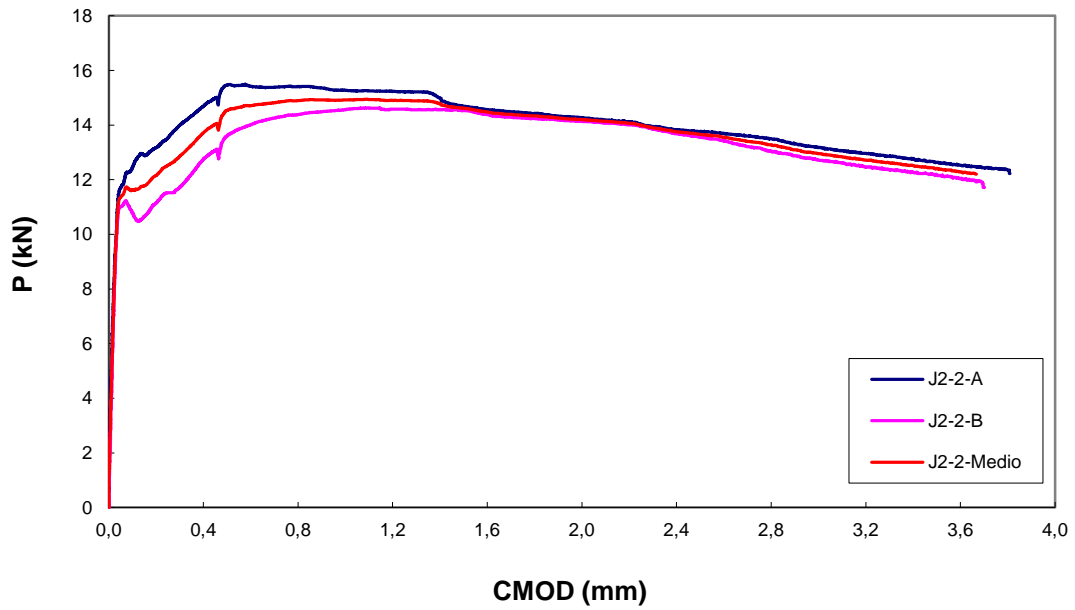


Figura 3.8: Curvas medias carga-abertura de fisura (CMOD) experimentales de las probetas J2-2-A, J2-2-B y su valor medio.

### Dosificación J3-1

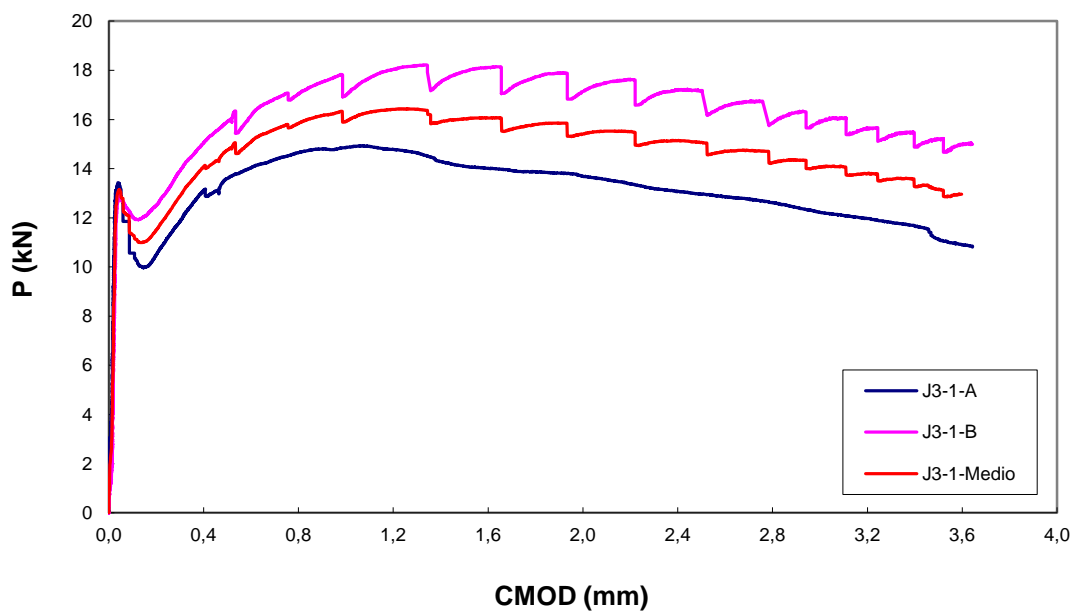


Figura 3.9: Curvas medias carga-abertura de fisura (CMOD) experimentales de las probetas J3-1-A, J3-1-B y su valor medio.

En la tabla 3.10 se muestra el valor residual de la resistencia a flexo-tracción ( $f_{R,j}$ ) para las aberturas de fisura de 0.5, 1.5, 2.5 y 3.5 ( $j=1,2,3$  y 4) respectivamente.

Tabla 3.10: Estimación de las resistencias residuales.

Dosificación	$P_{0,5}$ (kN)	$f_{R1}$ (MPa)	$P_{1,5}$ (kN)	$f_{R2}$ (MPa)	$P_{2,5}$ (kN)	$f_{R3}$ (MPa)	$P_{3,5}$ (kN)	$f_{R4}$ (MPa)
J2-1	13.20	4.22	13.24	4.24	12.09	3.87	10.74	3.44
J2-2	14.54	4.65	14.61	4.68	13.66	4.37	12.42	3.97
J3-1	14.76	4.72	16.02	5.13	15.07	4.82	13.15	4.21

### 3.2.3. Dimensiones y armado.

A continuación se muestran en la figura 3.10 un croquis de las dimensiones y el armado de las probetas en forma de Z para el ensayo *push-off*.

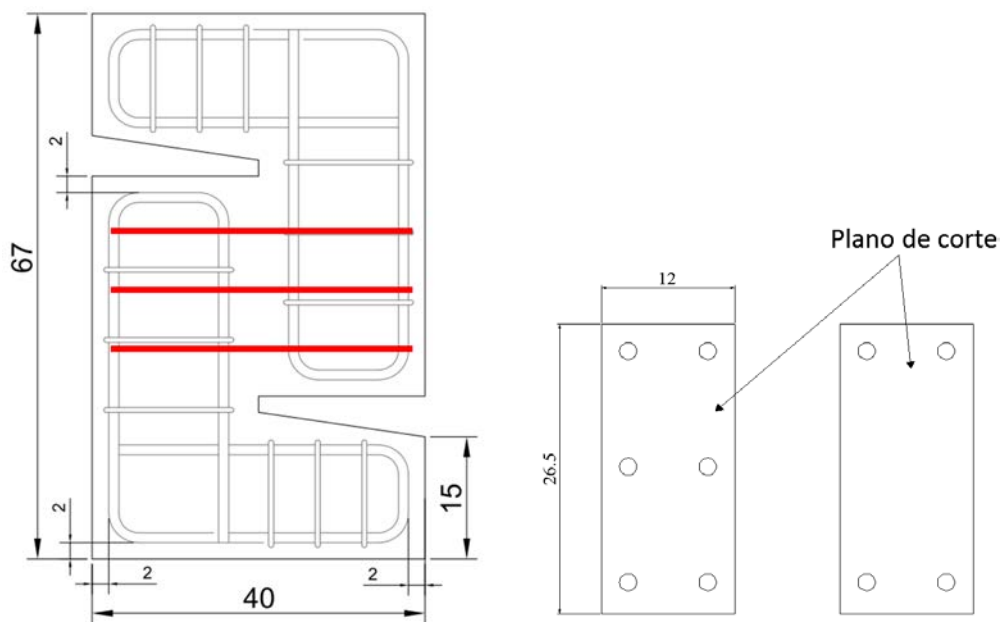


Figura 3.10: Dimensiones en centímetros de la probeta tipo *push-off* y del plano de cortante.

### 3.2.4. Proceso de fabricación.

En la secuencia de figuras que se muestra a continuación, se ilustra el proceso de fabricación de las probetas: (a) preparación de los moldes, (b) colocación de la ferralla, (c) hormigonado y (d) desmoldado.



Figura 3.11: Molde (a) sin y (b) con armaduras antes de hormigonar.



Figura 3.12: Probetas (c) tras hormigonar y (d) tras desmoldar.

Aparte de las probetas para el ensayo *push-off* se han fabricado otras probetas de acompañamiento con el fin de poder averiguar las características mecánicas del hormigón. Concretamente, se han fabricado probetas cúbicas de 100x100x100mm, probetas cilíndricas 150x300mm y probetas prismáticas 150x150x600mm en el caso de los hormigones reforzados con fibras de acero.

### 3.3. Instrumentación y proceso de ensayo.

En este ensayo la función de la instrumentación utilizada va relacionada con el control. Las variables a controlar son: desplazamiento y carga. Esto queda esquematizado del siguiente modo (ver figuras 3.13 y 3.14):

a) Control de desplazamiento: se realizarán tres tipos de medidas: mediante captadores de desplazamiento potenciométricos lineales (LVDT's), mediante puntos Demec y mediante tratamiento fotogramétrico con una cámara fotográfica Canon EOS 5D Mark II de 21.1 MPx.

b) Control de la carga: se dispone de un gato hidráulico de 500 kN (ver figura 3.14a ). Entre el gato y la probeta se coloca una célula de carga de 500 kN tipo C6A fabricada por HBM (ver figura 3.14a ).



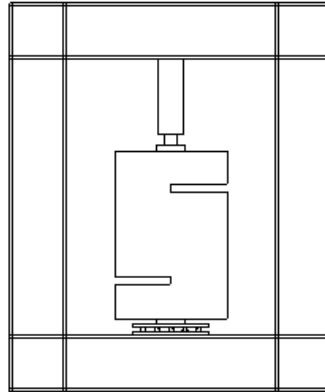


Figura 3.13: Croquis del dispositivo experimental.

La figura 3.14 muestra, a título de ejemplo, el proceso de ensayo de una de las probetas que consiste en una primera fase de instrumentación y la fase de ensayo propiamente dicha.



Figura 3.14: Fases de instrumentación y ensayo de las probetas.

La probeta se ensaya por medio del gato hidráulico de 500 kN (figura 3.14a). Entre el gato y la probeta se coloca, en todos los ensayos, la célula de carga de 500 kN (figura 3.14b) con el fin de poder controlar la carga que realmente transmite el gato hidráulico a la probeta. Cada probeta se instrumenta, en su cara dorsal, mediante transductores de desplazamiento (figura 3.14c) para medir desplazamientos relativos que permitan obtener valores de deslizamiento y de aberturas de fisura. La cara frontal coincidente con la superficie lisa de la probeta en contacto con el encofrado, se ha reservado para ser fotografiada con la cámara fotográfica con el objetivo de llevar a cabo medidas de desplazamiento relativos entre diferentes puntos de la probeta (figura 3.14d). Además, con el fin de calibrar las medidas fotogramétricas se han incluido puntos de medida Demec en la cara frontal y así poder tener una medida equivalente a las fotografías (figura 3.14e). En concreto se han colocado un total de 5 puntos Demec y se toman medidas manuales para diferentes escalones de carga.

El proceso de ensayo se ha llevado a cabo combinando el control de la carga y el control de desplazamientos impuestos gracias a la utilización de un transductor de desplazamiento tipo encoder (figura 3.14c).

En la figura 3.15 se puede observar la situación de rotura de una de las probetas de hormigón armado ensayadas en el laboratorio



*Figura 3.15: Vista del pórtico de ensayos tras la rotura. Vistas frontal y dorsal.*

## Capítulo 4:

# Análisis de la respuesta experimental.

### 4.1. Obtención y análisis de resultados.

En este apartado se explica todo el proceso analítico que se lleva a cabo para la obtención de los resultados.

A lo largo de cada ensayo se registran los datos correspondientes a la carga aplicada por la célula de carga y los desplazamientos de cada transductor de desplazamiento. A su vez, se toman fotografías desde el inicio del ensayo con una cadencia entre 1 y 2 segundos según las necesidades del ensayo. De forma simultánea, se toman medidas de las longitudes entre los diferentes puntos Demec, teniendo en cuenta una base de medida de 100mm según el aparato Demec que se ha utilizado.

Por tanto se dispone, por cada ensayo, de tres fuentes de información tanto para la obtención de desplazamientos como para la obtención de deformaciones: fotogrametría, puntos Demec y los transductores de desplazamiento.

A continuación se describe cada uno de los procesos.

#### 4.1.1. Trabajo de fotogrametría.

Como ya se ha mencionado, una vez obtenida la secuencia de fotos para cada ensayo, el proceso consiste en perseguir la variación de las coordenadas de los mismos puntos donde están situados los Demec en la pieza durante la realización del ensayo (ver figura 4.1). De este modo, será posible una posterior comparación con el proceso Demec (que se explica en el apartado 4.1.2. de este mismo documento) y, como consecuencia de ello, comprobar hasta qué punto es fiable el método fotogramétrico.

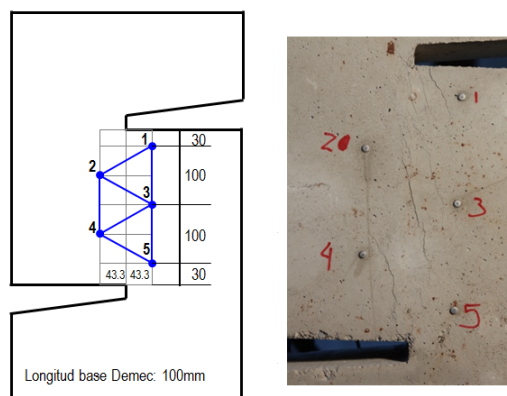


Figura 4.1: Representación y toma de fotografía de los puntos donde se sitúan los demec.

Además, también se pretende analizar otros aspectos más concretos como son la abertura y el deslizamiento de la fisura dominante en el ensayo. Esto resulta bastante factible de realizar a posteriori al saber cómo se ha producido la rotura de la probeta. Se muestra en la figura 4.2, para un determinado ensayo, la secuencia de fotografías tomada justo en el momento de la rotura, en la que puede observarse el punto exacto donde empieza a desarrollarse la rotura y la fisura de cortante por la que se desarrolla la rotura final. En definitiva se tiene información sobre el modo de fallo de la probeta estudiada.

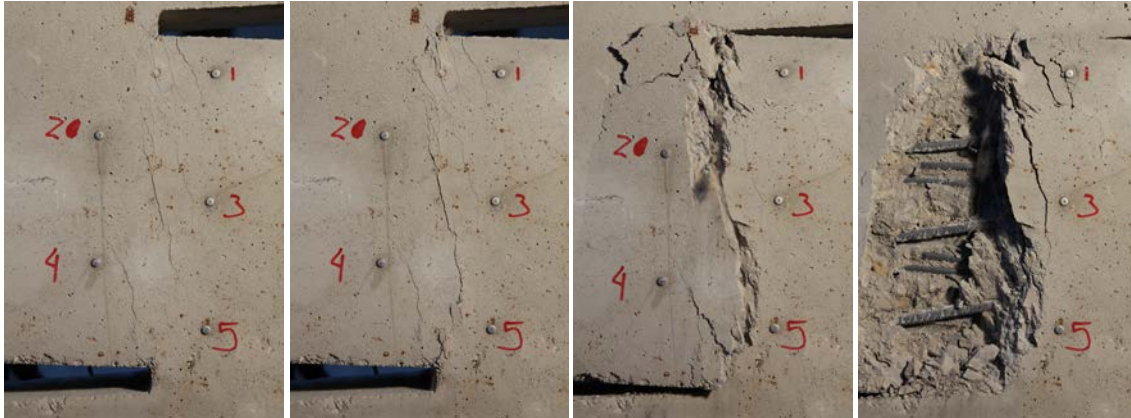


Figura 4.2: Secuencia de imágenes en el momento de la rotura. Probeta Z-HA-3F18-NF-1.

Para la realización del proceso de análisis, se toma como referencia la fotografía inicial de cada ensayo. Con la ayuda del programa AutoCAD, se sitúan cada uno de los puntos Demec según las coordenadas de dicho programa, tomando como origen del sistema de coordenadas una de las esquinas de la fotografía (ver figura 4.3).

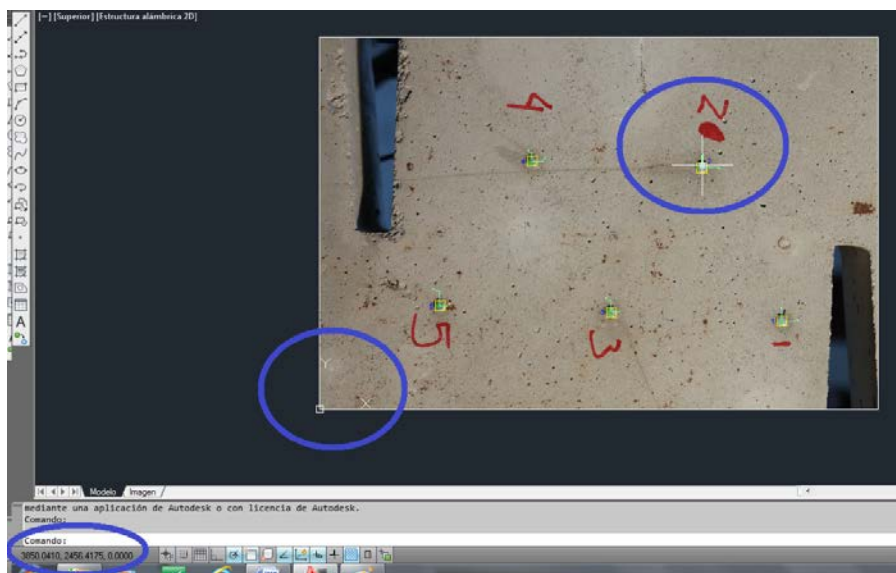
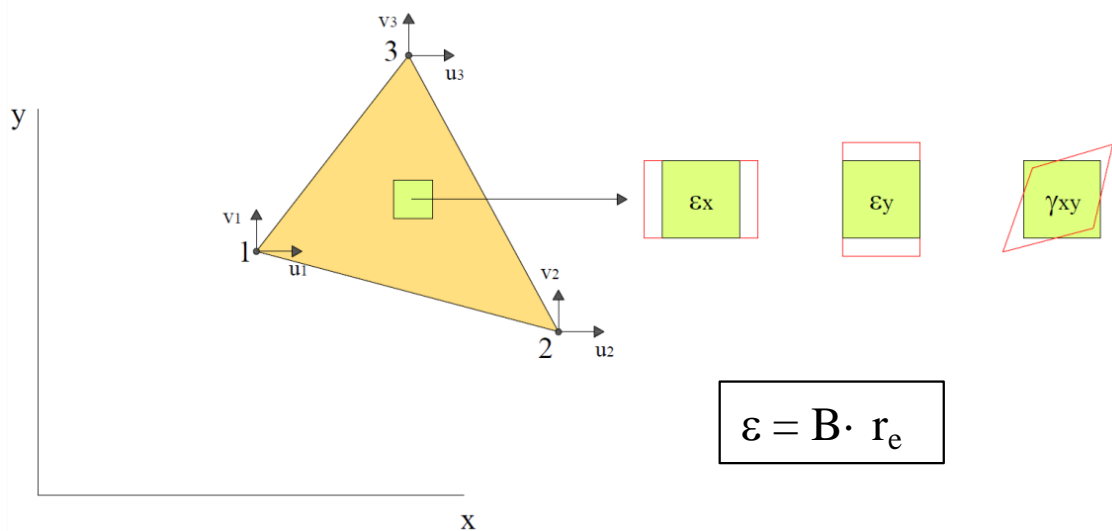


Figura 4.3: Obtención de coordenadas con AutoCAD.

Estas coordenadas iniciales se anotan en una tabla excel y se hace una traslación del "eje y" del AutoCAD. Las coordenadas así obtenidas se usarán para el seguimiento de los puntos Demec mediante el software "CEV-POI Móvil" desarrollado por ICITECH en el entorno LabView [84].

Como paso previo al uso del programa antes mencionado, será necesario la calibración de la rejilla usada como referencia en las fotografías. La extracción de los parámetros de calibración se realiza mediante el uso del programa "Vision Assistant", a través del cual se obtiene una imagen de la rejilla en formato "png" en la que los parámetros de calibración están incrustados. Con esta imagen ya es posible, con el uso del programa "CEV-POI Móvil", obtener resultados en milímetros, adecuadamente corregidos con la autocalibración realizada por el programa "Vision Assistant" [84].

Para la obtención de deformaciones se hace una adaptación de la modelización mediante el método de elementos finitos (MEF) con elementos triangulares de tres nodos [83]. Así pues, se asemeja la distribución de las posiciones de los puntos Demec a una malla con tres elementos triangulares (ver figuras 4.4 y 4.5). En cada uno de ellos impera la respuesta según el modelo del método de elementos finitos [83].



Donde:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad r_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Matriz B constante:

$$B = \begin{Bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{Bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} b_3 = y_1 - y_2 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \\ c_3 = x_2 - x_1 \quad c_1 = x_3 - x_2 \quad c_2 = x_1 - x_3 \end{array} \right\}$$

$$2 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (\text{área triángulo } 123)$$

Figura 4.4: MEF [83].

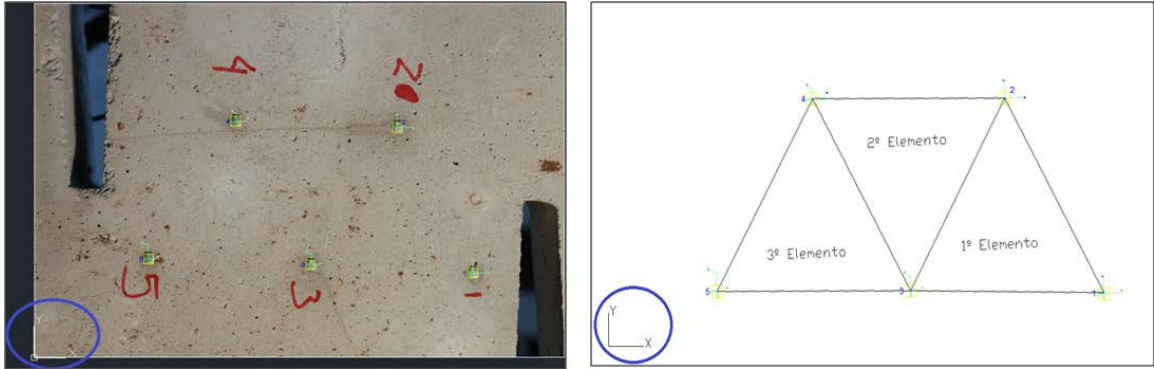


Figura 4.5: Analogía al MEF.

De este modo, usando las expresiones del Método de Elementos Finitos (MEF) se obtienen las deformaciones  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  para cada elemento. En las figuras 4.6 y 4.7 se muestra un ejemplo de la representación gráfica de las deformaciones para una probeta. En el anejo A se recoge la información referente al resto de probetas.

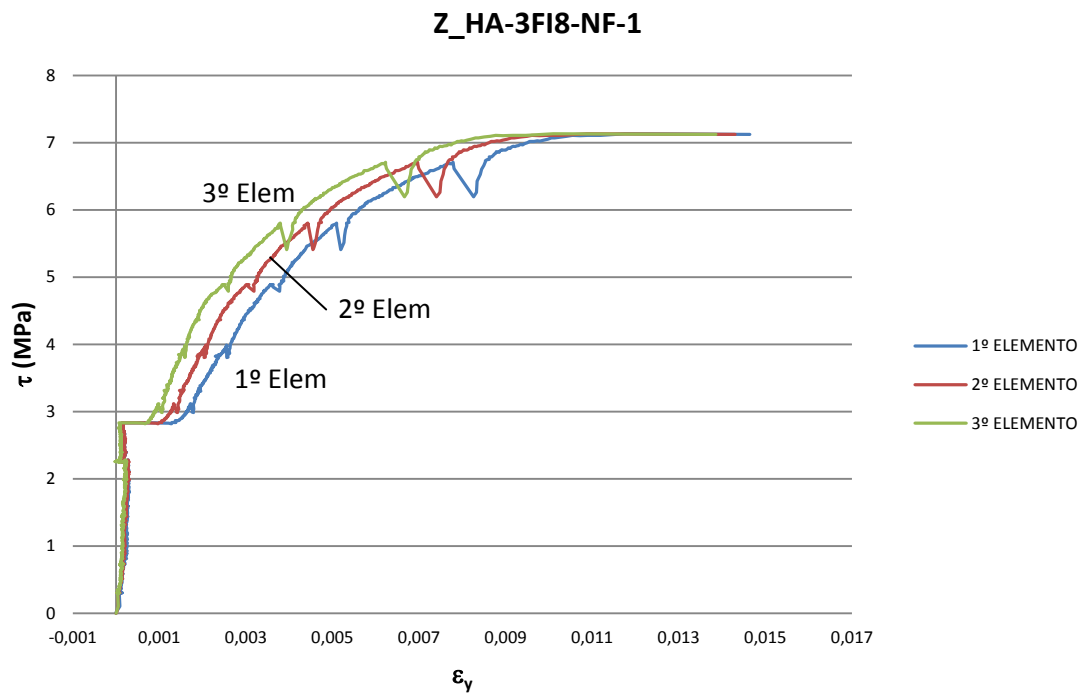


Figura 4.6: Deformación  $\varepsilon_y$  por fotogrametría para la probeta Z\_HA-3FI8-NF-1.

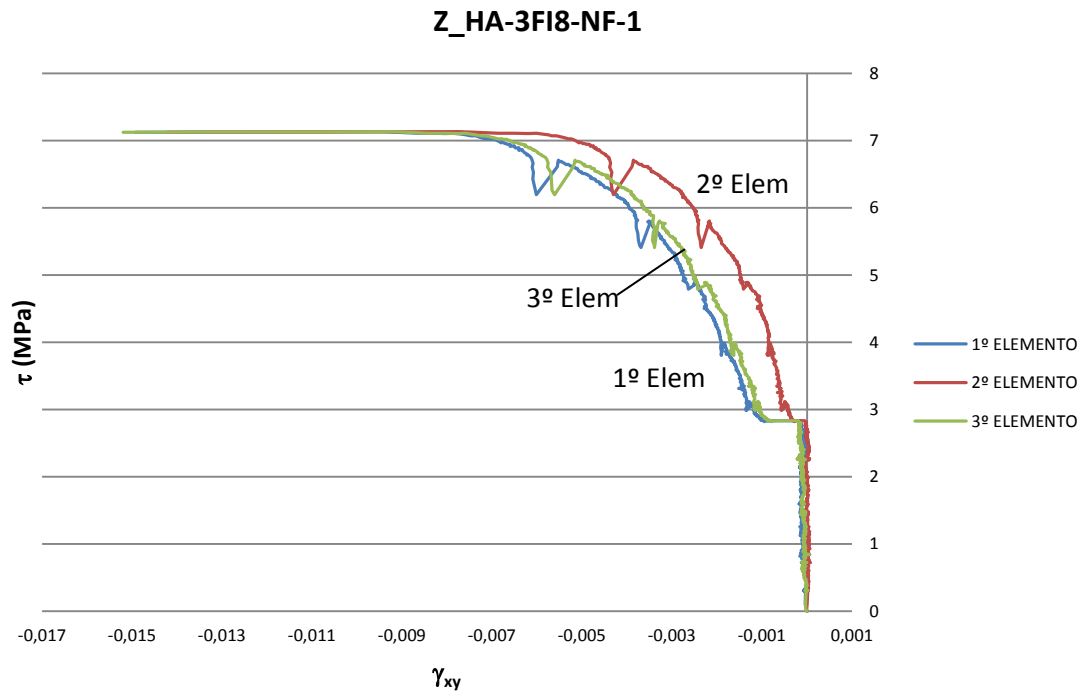


Figura 4.7: Deformación  $\gamma_{xy}$  por fotogrametría para la probeta Z\_HA-3FI8-NF-1.

Se observa que las deformaciones en dirección  $y$  ( $\varepsilon_y$ ) y las distorsiones angulares ( $\gamma_{xy}$ ) son estables. No ocurre lo mismo con las deformaciones en dirección  $x$  ( $\varepsilon_x$ ). La  $\varepsilon_x$  no muestra una clara tendencia.

También se observa un comportamiento  $\tau$ - $\varepsilon_y$  y  $\tau$ - $\gamma_{xy}$  similar a otros ensayos de panel como los de Vecchio [23], [29]. Es importante ver que los tres triángulos dan unas deformaciones similares. Se manifiesta una cierta constancia entre los tres triángulos.

Se puede distinguir claramente un comportamiento no fisurado, el fisurado y la posterior rotura.

Se ve como se produce la plastificación y, con ello, la tensión tangencial continua subiendo. Ello es debido a la resistencia ofrecida por la armadura transversal. Los resultados son similares a los obtenidos por "Shear -Friction Test on Reinforced Concrete Panels" de Vecchio y Nieto, 1991 [26].

Los movimientos 3D no se captan con la fotogrametría. Esto se ha observado en el momento de puesta en carga de la probeta. Para la captación de estos efectos sería necesario la disposición de la colocación de otra cámara fotográfica.

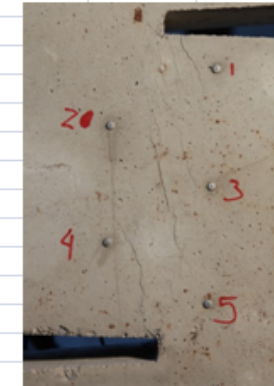
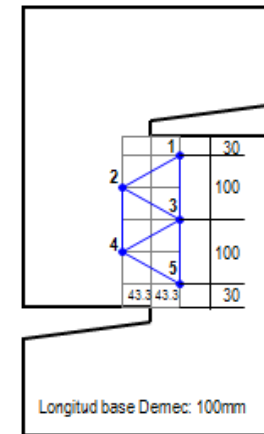
#### 4.1.2. Trabajo con los puntos DEMEC.

La obtención de los desplazamientos por medio de los puntos Demec se realiza midiendo directamente sobre ellos en cada escalón de carga. De este modo se pueden generar, para cada ensayo, fichas como la que se muestra en la figura 4.8. En el anejo A se recoge la información referente al resto de probetas.

Mediciones DEMEC

Probeta: Z-HA-3FI8-NF-1  
 Fecha: 29/11/2012

P (T)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12$ (mm)	$\Delta 23$ (mm)	$\Delta 13$ (mm)	$\Delta 34$ (mm)	$\Delta 45$ (mm)	$\Delta 24$ (mm)	$\Delta 35$ (mm)
0	0	-0.167	-0.908	-1.523	-0.844	-0.675	-1.070	-0.785
2	23.5176425	-0.155	-0.918	-1.534	-0.841	-0.675	-1.075	-0.792
4	48.40158229	-0.154	-0.933	-1.537	-0.839	-0.674	-1.075	-0.791
6	74.37598969	-0.152	-0.956	-1.548	-0.839	-0.680	-1.082	-0.796
8	100.6271932	0.062	-0.880	-1.534	-0.697	-0.648	-1.087	-0.790
10	129.1826149	0.166	-0.822	-1.541	-0.622	-0.636	-1.094	-0.794
12	157.9775994	0.304	-0.770	-1.541	-0.498	-0.588	-1.109	-0.791
14	186.988822	0.495	-0.694	-1.539	-0.323	-0.525	-1.101	-0.791
16	214.6939419	0.875	-0.570	-1.523	0.029	-0.425	-1.086	-0.791



P (kN)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12_{rel}$ (mm)	$\Delta 23_{rel}$ (mm)	$\Delta 13_{rel}$ (mm)	$\Delta 34_{rel}$ (mm)	$\Delta 45_{rel}$ (mm)	$\Delta 24_{rel}$ (mm)	$\Delta 35_{rel}$ (mm)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	23.5176425	0.012	-0.010	-0.011	0.003	0.000	-0.005	-0.007
40	48.40158229	0.013	-0.025	-0.014	0.005	0.001	-0.005	-0.006
60	74.37598969	0.015	-0.048	-0.025	0.005	-0.005	-0.012	-0.011
80	100.6271932	0.229	0.028	-0.011	0.147	0.027	-0.017	-0.005
100	129.1826149	0.333	0.086	-0.018	0.222	0.039	-0.024	-0.009
120	157.9775994	0.471	0.138	-0.018	0.346	0.087	-0.039	-0.006
140	186.988822	0.662	0.214	-0.016	0.521	0.150	-0.031	-0.006
160	214.6939419	1.042	0.338	0.000	0.873	0.250	-0.016	-0.006

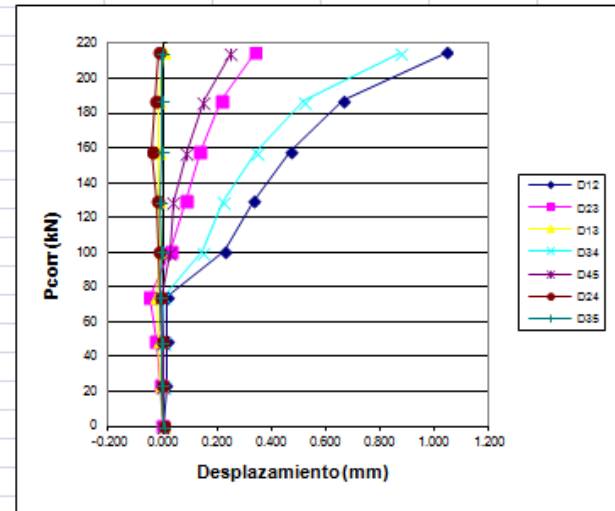


Figura 4.8: Ficha de desplazamientos para los puntos demec de la probeta Z-HA-3FI8-NF-1.



Donde  $P_{\text{corregida}}$  hace referencia a la presión transmitida por la célula de carga.

Para el cálculo de las deformaciones de los puntos donde están situados los Demec se realiza un procedimiento similar al hecho para el cálculo de las deformaciones en fotogrametría (apartado 4.1.1 de este mismo documento). Se hace un planteamiento trigonométrico siguiendo el mismo esquema que se muestra en la figura 4.5 pero suponiendo que el eje x se encuentra a lo largo de la dirección marcada por la alineación de los puntos 5-3-1 y el punto 3 es el origen. Esta situación se mantiene invariable a lo largo de todo el ensayo. De este modo se obtiene el valor de las coordenadas x e y de cada punto a partir de las relaciones trigonométricas entre los  $\Delta$  entre cada punto en valor absoluto. Con ello, para la obtención de las deformaciones se hace la misma adaptación de la modelización mediante el método de elementos finitos (MEF) con elementos triangulares de tres nodos [83] que se ha hecho en el cálculo para la fotogrametría (apartado 4.1.1 de este mismo documento).

Así pues, usando las expresiones del Método de Elementos Finitos (MEF) se obtienen las deformaciones  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  para cada elemento. En las figuras 4.9 y 4.10 se muestra un ejemplo de la representación gráfica de las deformaciones para una probeta. En el anejo A se recoge la información referente al resto de probetas.

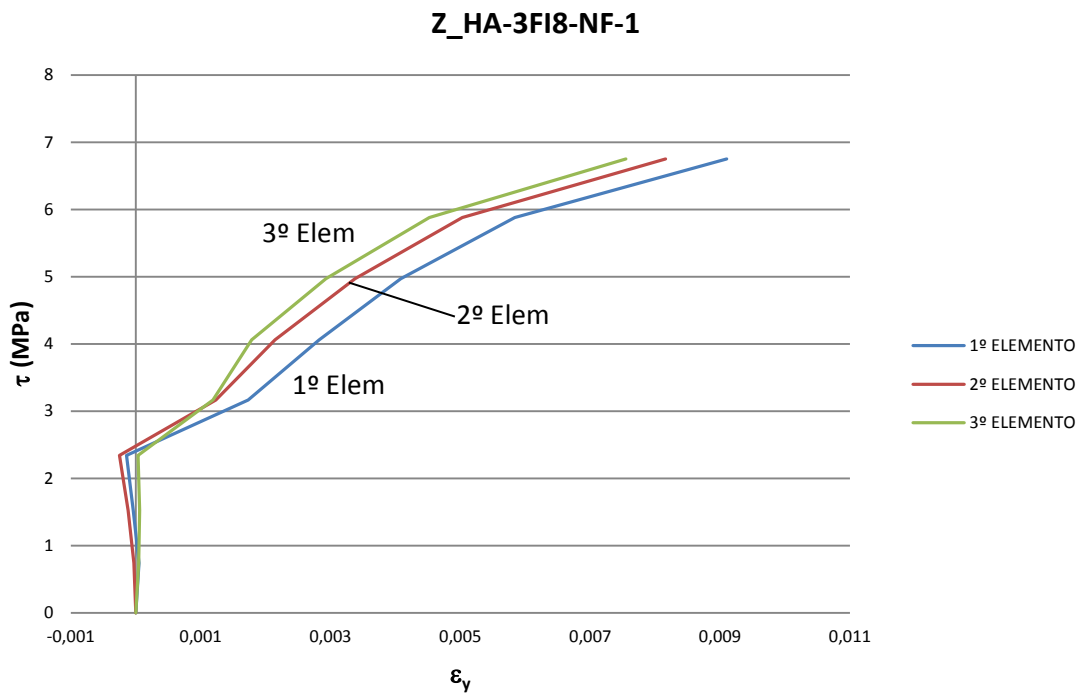


Figura 4.9: Deformación  $\varepsilon_y$  por medida Demec para la probeta Z\_HA-3FI8-NF-1.

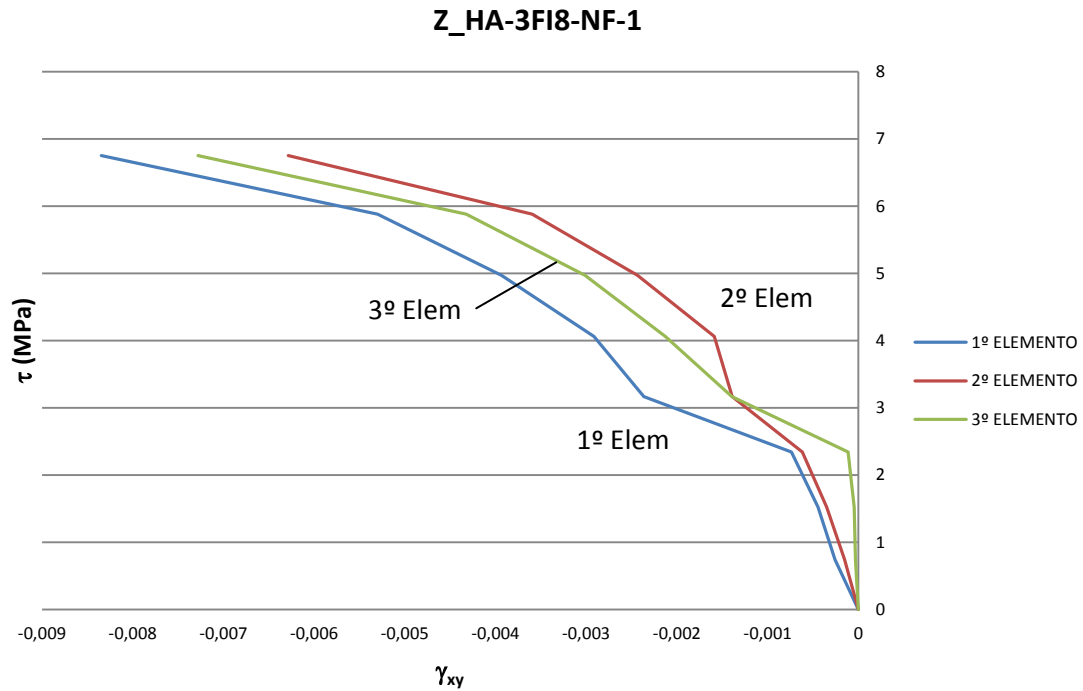


Figura 4.10: Deformación  $\gamma_{xy}$  por medida Demec para la probeta Z\_HA-3FI8-NF-1.

Nuevamente se observa la misma tendencia que con la fotogrametría, es decir, las deformaciones en dirección  $y$  ( $\varepsilon_y$ ) y las distorsiones angulares ( $\gamma_{xy}$ ) son estables. Los comportamientos también siguen el mismo patrón que siguen los resultados obtenidos mediante el proceso fotogramétrico.

#### 4.1.3. Comparación de resultados entre la fotogrametría y Demec.

Para la realización de esta comparación se supone que la medida Demec es la exacta (más adelante se evalúa la precisión del sistema Demec). A partir de esto, se evalúa cuanto varían los resultados obtenidos por fotogrametría con respecto a la medida Demec.

A continuación se puede ver un gráfico comparativo (figura 4.11) entre los desplazamientos obtenidos por fotogrametría y los obtenidos mediante las medidas obtenidas de los puntos Demec para una probeta (en el anejo A se recoge la información referente al resto de probetas). Se puede observar que para las medidas que se establecen entre los puntos 1-2, 2-3, 3-4 y 4-5, entre los cuales aparecieron fisuras por cortante intermedias, las medidas hechas con el Demec y con las fotografías marcan una misma tendencia y un grado de aproximación satisfactorio.

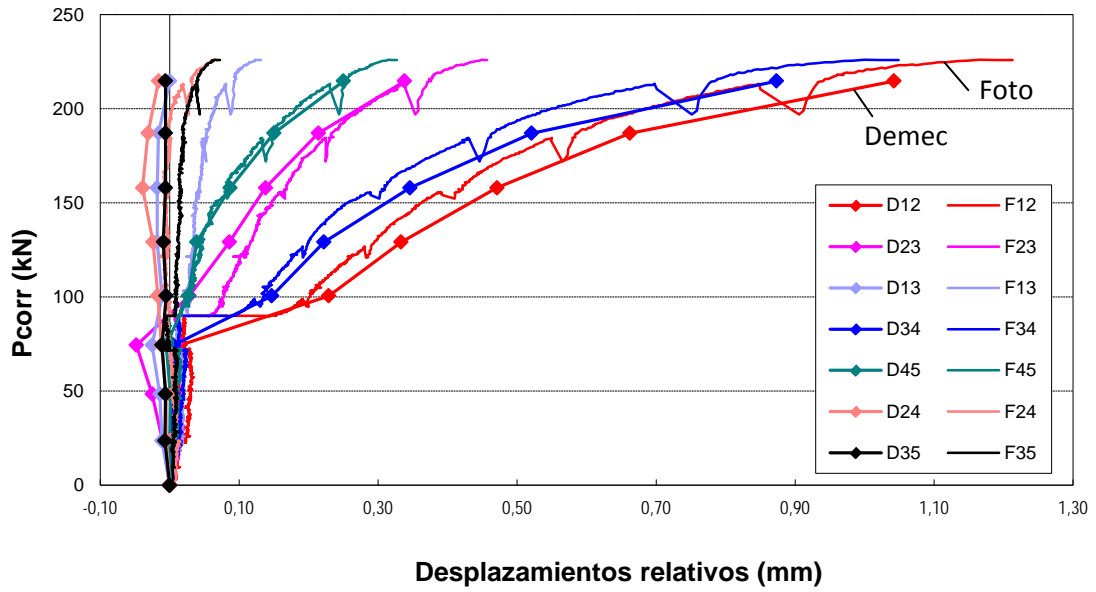


Figura 4.11: Comparación Demec-foto en desplazamientos para la probeta Z\_HA-3FI8-NF-1.

Precisión de la Fotogrametría:

Si se realiza un tratamiento estadístico del error de medida de desplazamiento producido por la fotogrametría con respecto a la medida realizada con los Demec (ver figura 4.12) se observa que la mayoría de las medidas oscilan alrededor de un valor medio de 0.0411%.

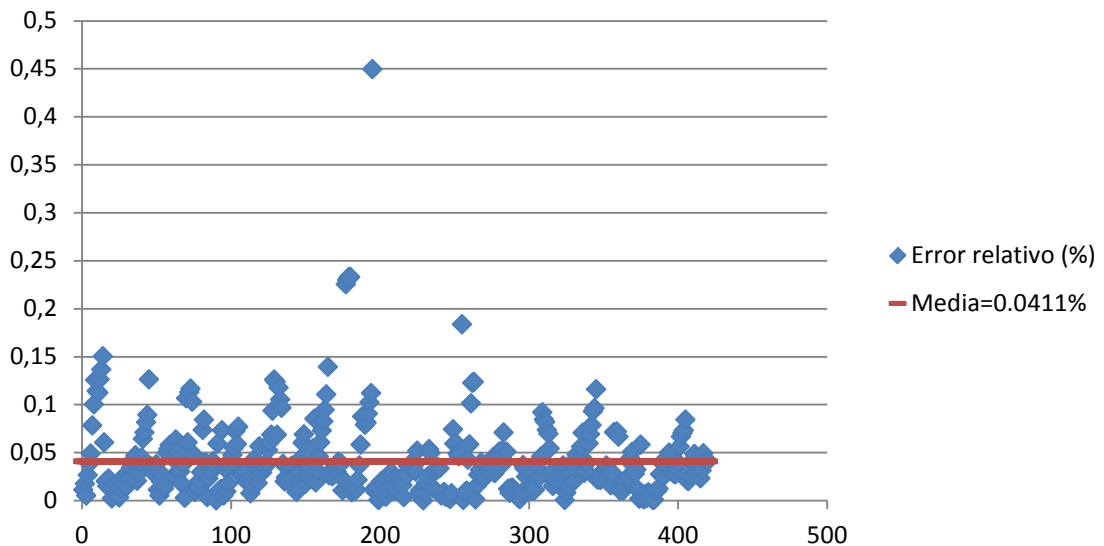


Figura 4.12: Errores relativos en % de las 420 medidas de desplazamiento comparadas entre fotogrametría y Demec.

Representando un histograma de frecuencias (ver figura 4.13) se observa que el error cometido en 383 de las 420 medidas se encuentra por debajo de 0.090%.

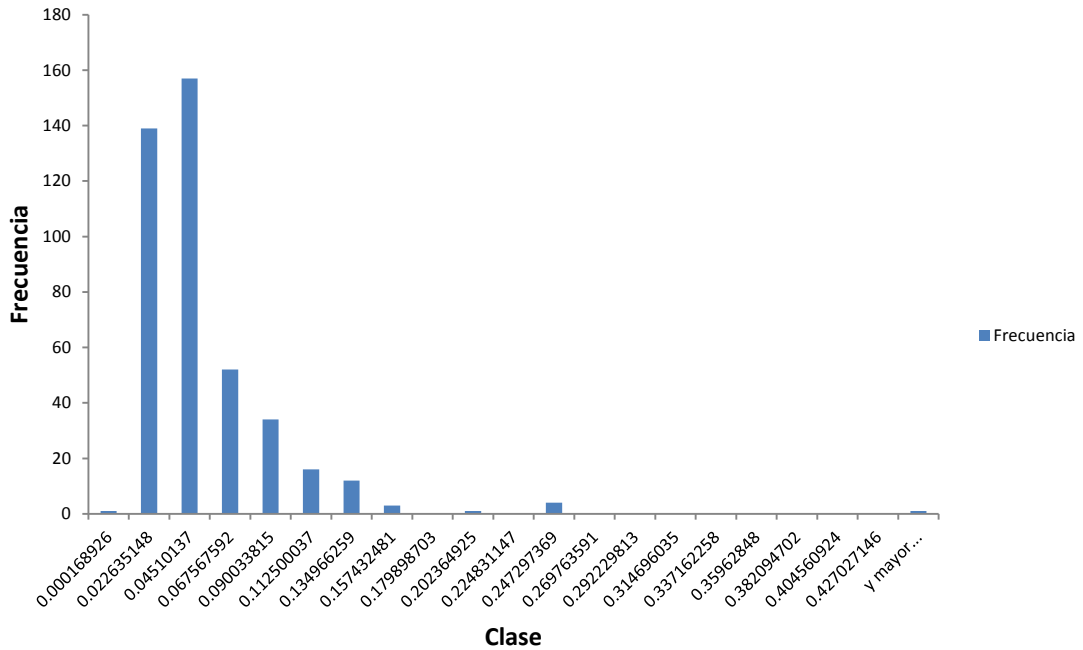


Figura 4.13: Histograma donde se representa el número de medidas que presentan un error relativo dentro de cada intervalo (en %).

Otros estadísticos descriptivos que también resultan indicativos se muestran en la tabla 4.1:

Tabla 4.1: Estadística descriptiva.

Estadística Descriptiva	
Media	0.04110063
Error típico	0.00198298
Mediana	0.03145509
Desviación estándar	0.04063894
Varianza de la muestra	0.00165152
Curtosis	27.6873825
Coficiente de asimetría	3.8767757
Rango	0.44932444
Mínimo	0.00016893
Máximo	0.44949337
Suma	17.2622651
Cuenta	420
Mayor (1)	0.44949337
Menor(1)	0.00016893
Nivel de confianza(95,0%)	0.00389782
Percentil 5%	0.00381901
Percentil 95%	0.11247425

Precisión Demec:

Para la evaluación de la precisión del sistema Demec (supuesto exacto anteriormente) se realizan 60 medidas de manera particular y repetitiva. Las 60 medidas se dividen en tandas de 10 medidas cada una. En la tabla 4.2 adjunta se muestran distintos estadísticos para cada tanda y además, en la tabla 4.3, también se muestra el promedio de la diferencia entre la media y el percentil del 5% y del 95% para cada tanda.

Tabla 4.2: Estadísticos por tanda.

Media	0.847	0.554	0.488	0.364	-0.349	-1.092
Desv.estándar	0.008	0.002	0.003	0.003	0.005	0.003
CV (%)	0.897	0.409	0.662	0.738	-1.410	-0.314
Percentil 5%	0.840	0.550	0.486	0.360	-0.355	-1.097
Percentil 95%	0.859	0.556	0.493	0.366	-0.342	-1.089
media - per5%	0.008	0.004	0.002	0.004	0.006	0.005
media - per95%	0.012	0.002	0.005	0.002	0.007	0.003

Tabla 4.3: Promedio total.

TOTAL	MEDIA
media - per5%	0.005
media - per95%	0.005

El error medio de la fotogrametría tomando como exacto el método Demec es de 41 micras  $y$ , con el percentil del 95%, de 112 micras (ver tabla 4.1). Al evaluar el método Demec, se obtiene que el percentil del 95% es de 5 micras. Es decir, la medida Demec se distancia de la media, como mucho, 5 micras, mientras que la fotogrametría se distancia de la media 112 micras.

En las figuras 4.14 y 4.15 se muestran las comparaciones entre las deformaciones  $\varepsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  obtenidas por fotogrametría y las obtenidas a través de las medidas Demec para cada probeta. En el anejo A se recoge la información referente al resto de probetas.

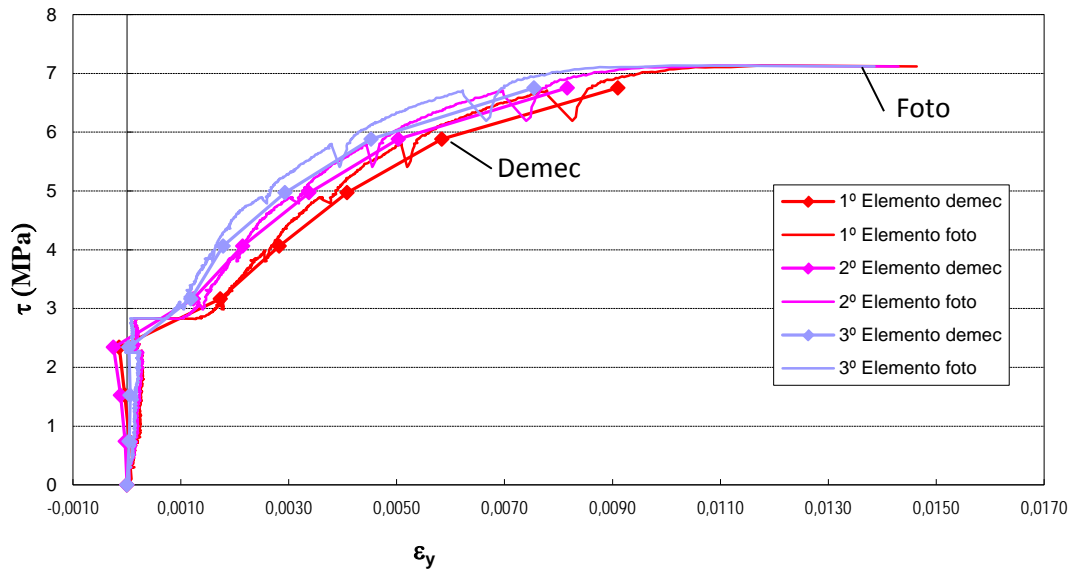


Figura 4.14: Comparación Demec-Foto para deformación  $\varepsilon_y$  para la probeta Z\_HA-3FI8-NF-1.

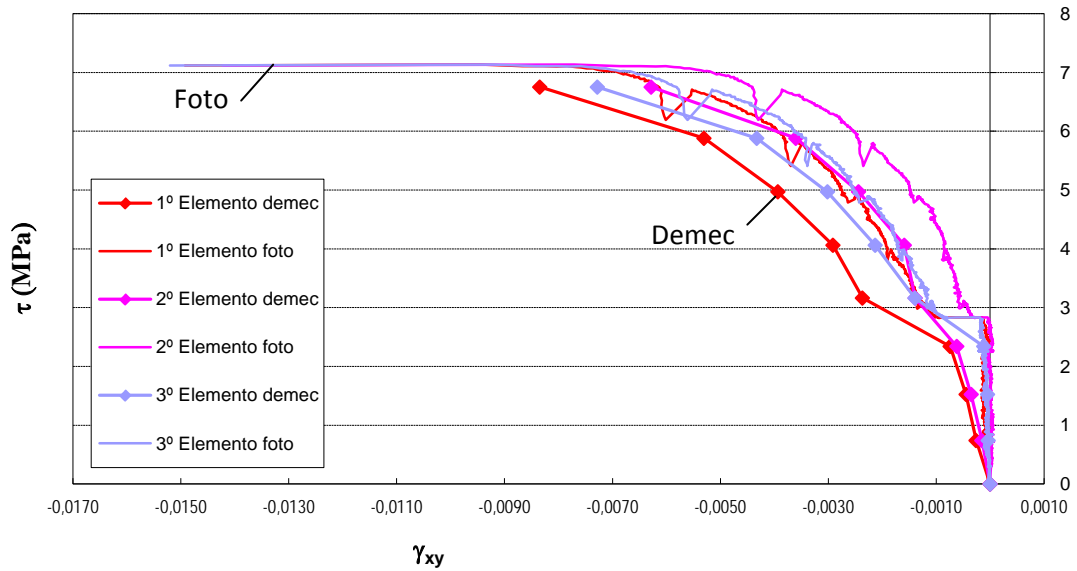


Figura 4.15: Comparación Demec-Foto para deformación  $\gamma_{xy}$  para la probeta Z\_HA-3FI8-NF-1.

Se observa comparando por cada elemento para  $\varepsilon_y$  y para  $\gamma_{xy}$  que entre la fotogrametría y la medida Demec existe la misma tendencia pero con un cierto decalaje.

La aproximación es satisfactoria para  $\varepsilon_y$  y para  $\gamma_{xy}$ , ya que marcan valores suficientemente grandes para que la medida en fotogrametría sea asumible.

#### 4.1.4. Trabajo de los transductores de desplazamiento.

Como ya se ha comentado anteriormente en el capítulo 3 y en el apartado 4.1 de este mismo capítulo, para la realización de los ensayos también se colocan transductores de desplazamiento con el fin de medir desplazamientos relativos que permitan obtener valores de deslizamiento y de aberturas de fisura.

De este modo, al igual que se ha hecho en los apartados 4.1.1. y 4.1.2. con la fotogrametría y con las medidas Demec, con los transductores también se obtienen desplazamientos (ver figura 4.16 y el anejo A donde se recoge la información referente al resto de probetas).

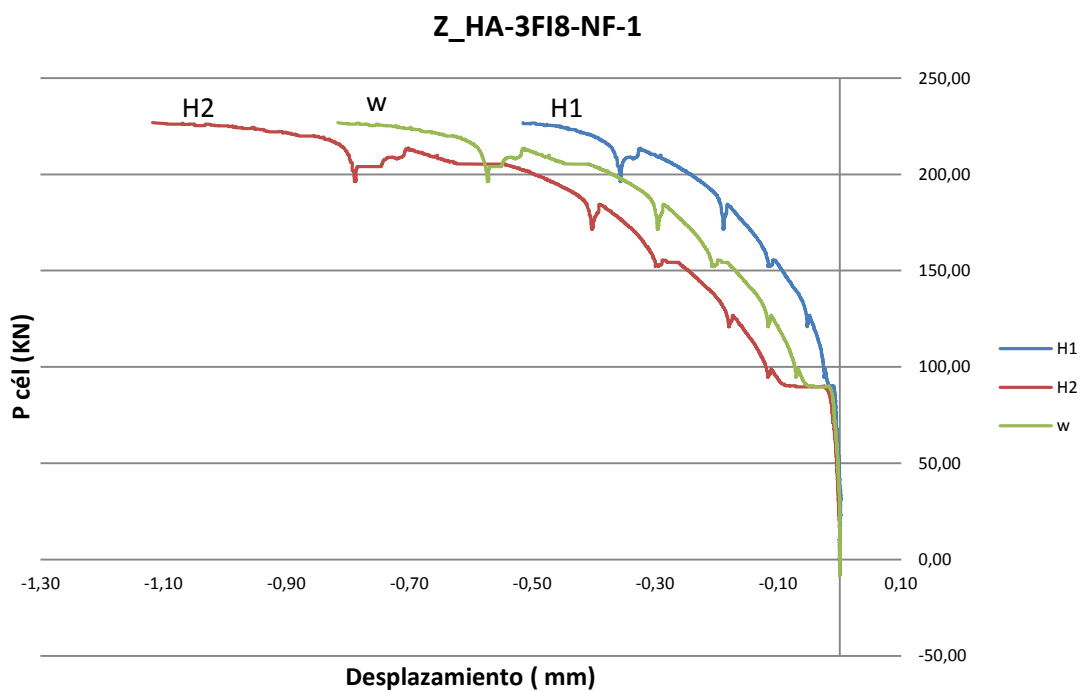


Figura 4.16: Desplazamientos obtenidos de los transductores para la probeta Z\_HA-3FI8-NF-1. Donde H1 y H2 son las medidas del desplazamiento y w es el valor medio.

Si se compara el valor medio de los desplazamientos o aberturas de fisura (w) con los desplazamientos obtenidos mediante la fotogrametría y las mediciones Demec (ver figura 4.17 y el anejo A donde se recoge la información referente al resto de probetas) se observa que existe una misma tendencia.

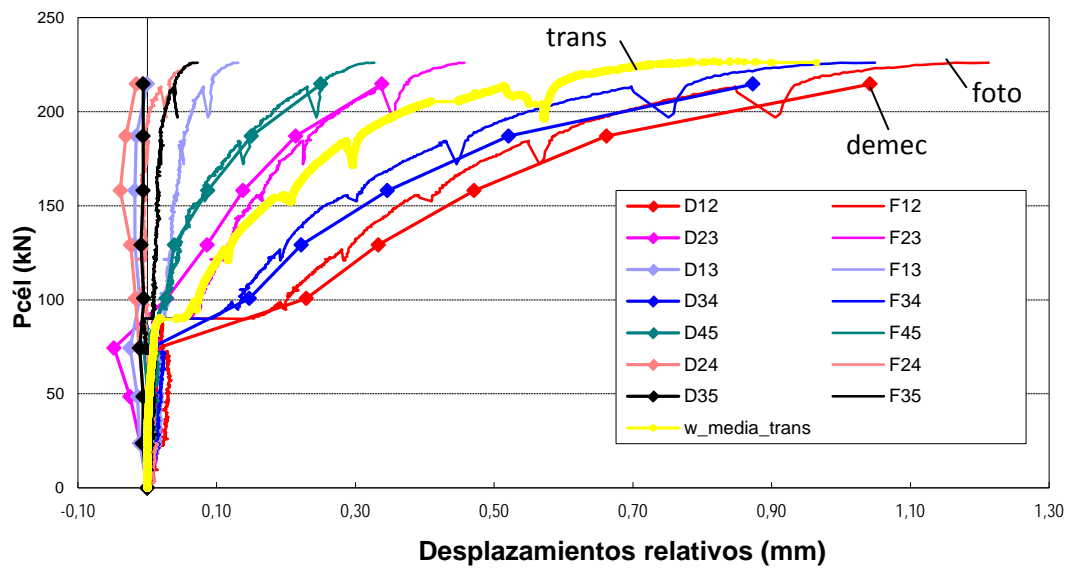


Figura 4.17: Comparación Demec-foto-transductor para desplazamientos para la probeta Z\_HA-3FI8-NF-1.

A partir de los datos de abertura de fisura por cada escalón de carga ( $w_i$ ) y sabiendo que la longitud inicial ( $L_0$ ) del transductor en reposo es de 86.60mm se obtienen las deformaciones como el cociente:  $\varepsilon_{yi} = w_i / L_0$ . De este modo se obtiene el gráfico de la figura 4.18 para una probeta y los del anejo A donde se recoge la información referente al resto de probetas.

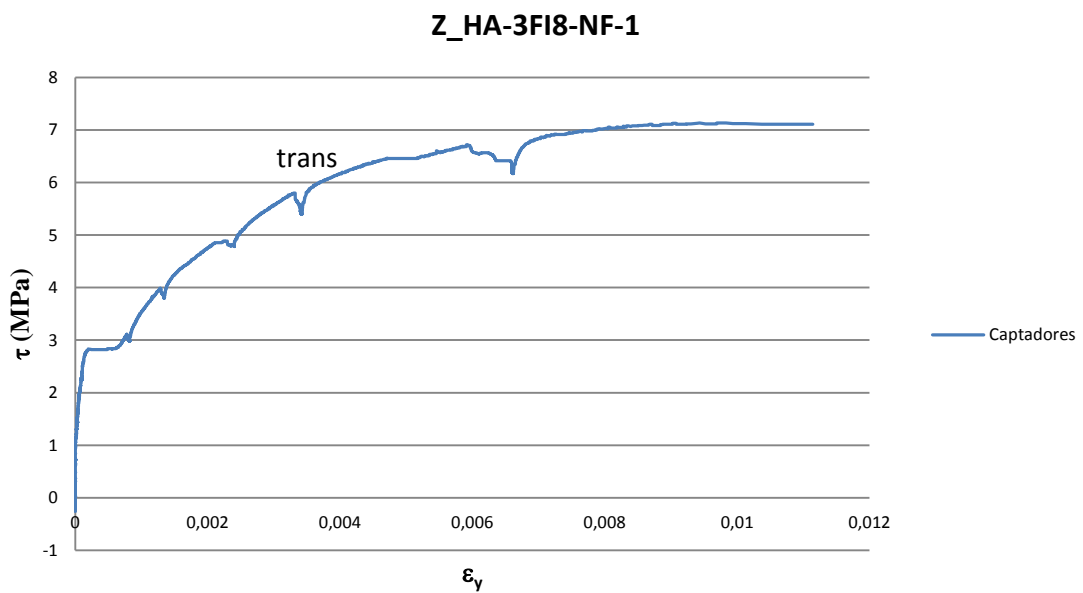


Figura 4.18: Deformación  $\varepsilon_y$  obtenida a partir de los transductores de desplazamiento para la probeta Z\_HA-3FI8-NF-1.



Si estos valores se comparan con los obtenidos con la fotogrametría y las medidas Demec se obtiene la figura 4.19 para una probeta y en el anejo A para el resto de probetas:

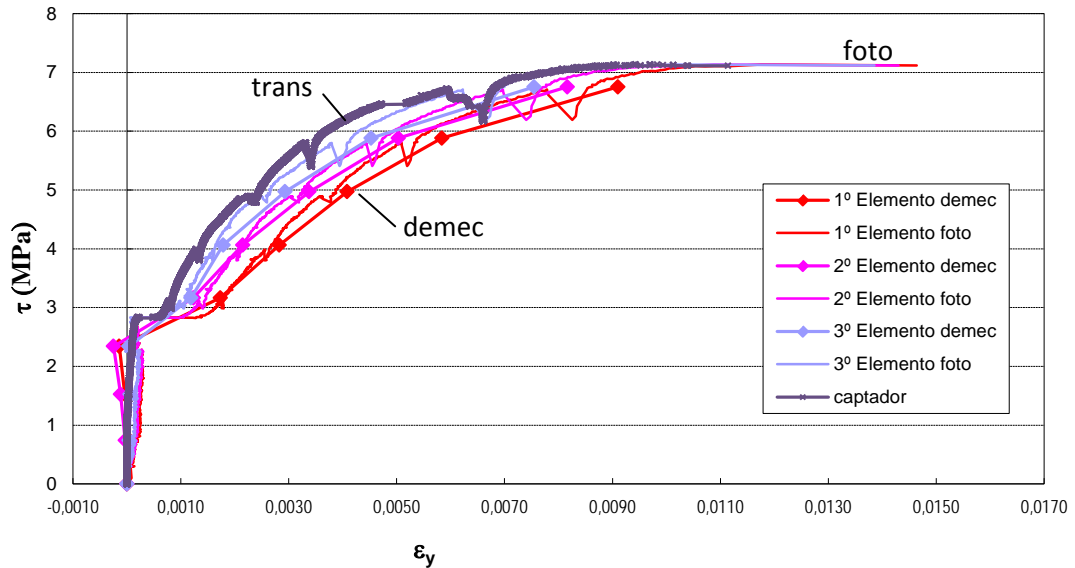


Figura 4.19: Comparación Demec-Foto-Transcutor para deformación  $\epsilon_y$  para la probeta Z\_HA-3F18-NF-1.

De aquí se puede observar que, aunque con cierto decalaje, las tendencias en cualquiera de los tres procedimientos son muy similares.

## 4.2. Discusión de resultados experimentales.

Hay que tener en cuenta que el valor de  $\tau$  se obtiene como una  $\tau_{media}$ , dividiendo el valor de la P aplicada por el gato hidráulico entre el área del plano de corte ( $h_{entre\_entallas} \cdot e_{probeta}$ ).

Las curvas que se obtienen son una media de dos probetas por dosificación que, a su vez, son la media de tres triángulos. Globalmente se obtienen resultados adecuados.

Se asume, con un error controlado, que las medidas fotogramétricas son suficientemente fiables.

El análisis de resultados realizado según el apartado 4 extendido para todas las probetas se muestra en las figuras 4.20 y 4.21. Son los resultados de la fotogrametría.

En las figuras 4.20 y 4.21 se representa la tensión tangencial sobre  $f_c$  para que sean comparables los resultados entre las distintas probetas. Este es un modo de adimensionalizar debido a la existencia de variación de resistencia entre dosificaciones.

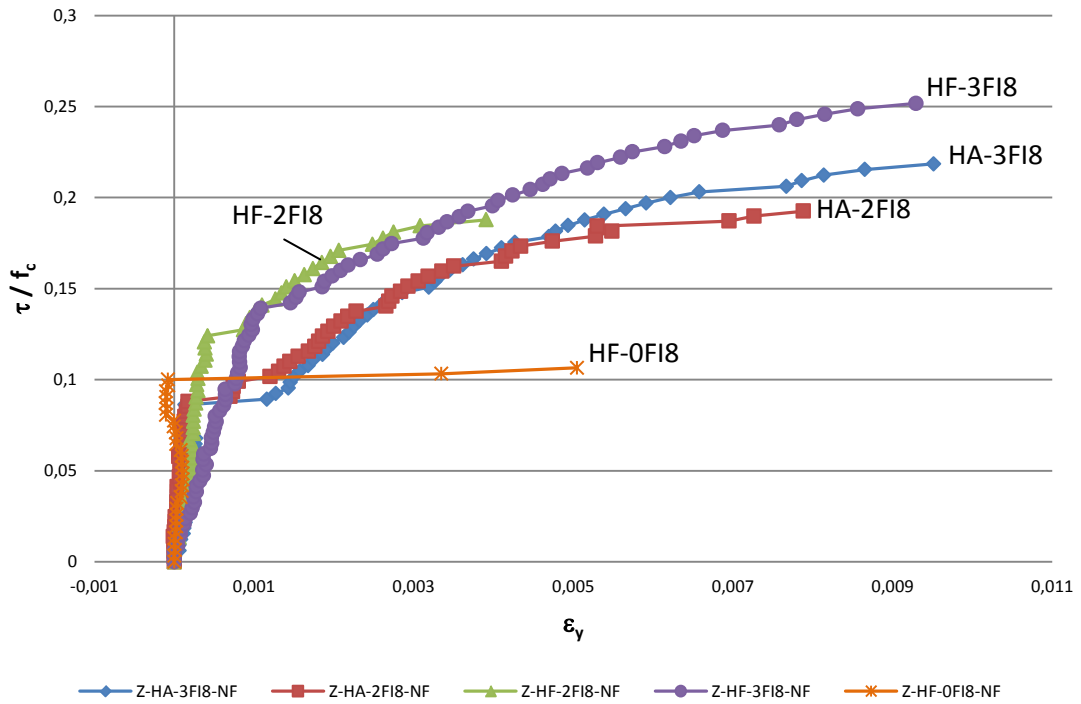


Figura 4.20: Comparativa  $\epsilon_y$  entre hormigón armado y hormigón armado reforzado con fibras.

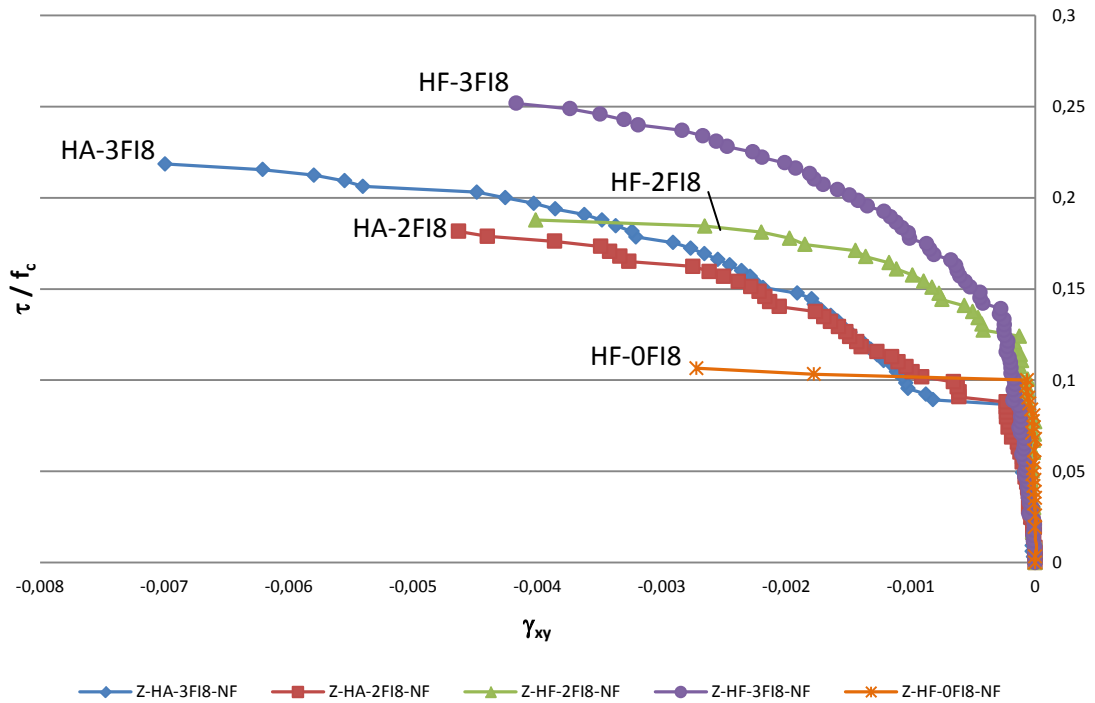


Figura 4.21: Comparativa  $\gamma_{xy}$  entre hormigón armado y hormigón armado reforzado con fibras.

Las probetas con fibras presentan mayor rigidez a cortante que las de hormigón armado. Este incremento de rigidez se observa principalmente tras la fisuración. Esto puede ser debido al uso de fibras de corta longitud.

La carga máxima alcanzada en las probetas de hormigón reforzado con fibras cuando se usan tres cercos de armadura de cortante es significativamente superior a las de hormigón armado sin fibras, tal y como se muestra en la tabla 4.4.

Tabla 4.4: tensión tangencial última.

	$\tau_{cr}$ (Mpa)	$\tau_u$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\tau_u / f_c$
Z-HA-3FI8-NF	2.75	6.97	32.5	0.21430769
Z-HA-2FI8-NF	3.30	6.87	36.35	0.18885832
Z-HF-2FI8-NF	3.70	5.60	29.82	0.18779343
Z-HF-3FI8-NF	4.75	8.68	33.77	0.25688481
Z-HF-0FI8-NF	3.20	3.83	30.98	0.12362815

Se observa que en el instante en el que se produce la plastificación en dirección y la tensión tangencial continua subiendo. Los resultados son similares a los obtenidos por otros autores [23], [26] y [29]. Hay que entender que el momento de la plastificación se intuye en las gráficas de las figuras 30 y 31 a partir del valor de deformación obtenido como:

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{554.086}{178765} \approx 0.0031$$

### 4.3. Conclusiones experimentales.

Se observa que las deformaciones en dirección y ( $\varepsilon_y$ ) y las distorsiones angulares ( $\gamma_{xy}$ ) son estables en los tres métodos utilizados, similar a otros ensayos de panel realizados por otros autores [23], [26] y [29].

Se ha constatado que la distribución de deformaciones en dirección y ( $\varepsilon_y$ ) y las distorsiones angulares ( $\gamma_{xy}$ ) se mantienen prácticamente constantes a lo largo del plano de corte.

Se puede distinguir claramente el comportamiento no fisurado, el fisurado y la posterior rotura así como la plastificación de las armaduras transversales.

Las probetas con fibras presentan mayor rigidez a cortante que las de hormigón armado principalmente tras la fisuración debido a la utilización de fibras de corta longitud.



## Capítulo 5:

# Modelización.

En este capítulo se describe el modelo utilizado para representar el material. A la hora de modelar el material que compone las distintas probetas, se parte de varios tipos de hormigones: hormigón armado sólo en dirección  $x$ , hormigón armado en dirección  $x$  y con cercos en el alma en dirección  $y$  y hormigón armado en dirección  $x$ , con cercos en el alma en dirección  $y$  y con fibras de acero distribuidas uniformemente en la masa del hormigón. Para ello se usan cuatro modelos numéricos 2D de material: el modelo *DSFM* propuesto por Vecchio [27], [28] y [29], el modelo *hor2dpan* desarrollado por Juan Navarro [88] a partir de la formulación de Stevens et al [89], el modelo *MatJ2* desarrollado por Saritas [96] según Lubliner et al. (1993) [95] para la modelización del hormigón armado (RC); y el modelo *DSFM-Ser* para hormigón armado y reforzado con fibras de acero (SFRC) desarrollado a partir del DSFM para compresión y el modelo constitutivo de Serna-Fuster [39] para tracción, usando para ello al Análisis Inverso.

La determinación de los materiales 2D que se usan para modelar el comportamiento constitutivo del RC: DSFM, hor2dpan y MatJ2 se lleva a cabo mediante el análisis directo, mientras que en la determinación del material 2D DSFM-Ser para modelar el comportamiento constitutivo de tracción del SFRC se usa el análisis inverso. Por tanto en este capítulo también se explica, de un modo teórico, en qué consiste cada uno de estos análisis para su posterior implementación numérica.

También se describe el tipo de elementos finitos que se utilizan para la modelización de las probetas tipo *push-off* de RC en el capítulo 6, así como la validación de un panel y algunas vigas que se llevan a cabo en los anejos D y E mediante el método de los elementos finitos.

### 5.1. Definición del modelo material

El ensayo *push-off* es un tipo de ensayo en el que se busca conseguir un comportamiento de cortante lo más puro posible en una determinada zona de la pieza, concretamente en el plano de corte situado entre entallas. Cuando se habla de modelar como material se refiere a que se modela la respuesta frente a cortante puro de un punto material que estaría situado en el plano de corte.

En este apartado se describen los distintos materiales que se usan tanto en la modelización como punto material como cuando se modela con el uso de elementos finitos. Estos materiales son:

- Material 2D para RC: *DSFM*, *hor2dpan* y *MatJ2*.
- Material 2D para SFRC: *DSFM-Ser*.

- Material 1D para las barras de acero: *Acero*.

### 5.1.1 Material DSFM

La formulación del material *DSFM* se lleva a cabo según Vecchio [27]. En este apartado se recoge de una forma resumida y a modo de esquema toda la formulación necesaria para definir el material utilizada por Vecchio [27]. En el anejo B se describe con mayor detalle.

#### Condiciones de equilibrio [27].

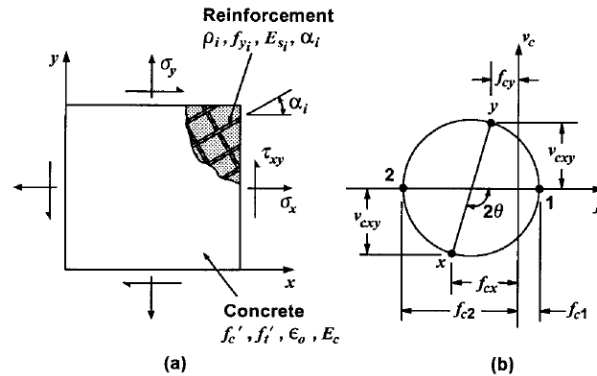


Figura 5.1: Elemento de hormigón armado: (a) Armado y condiciones de carga; (b) Círculo de Mohr para la media de las tensiones en el hormigón [27].

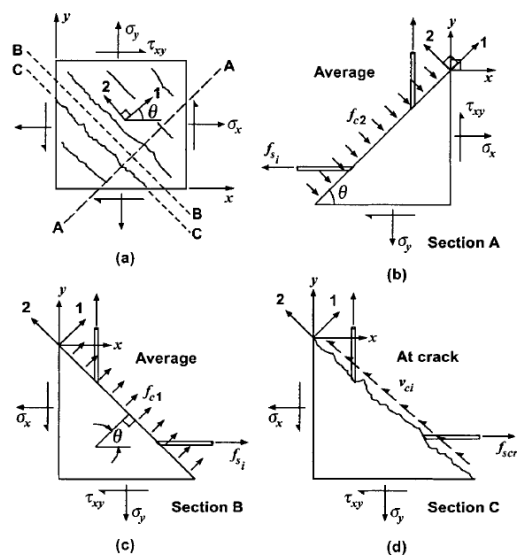


Figura 5.2: Condiciones de equilibrio: (a) Condiciones externas; (b) Paralelas a la dirección de las fisuras; (c) Perpendiculares a dirección de las fisuras; (d) a lo largo de la superficie de la fisura [27].

Tensiones medias  $[\sigma]$ :

$$[\sigma] = [D_c][\varepsilon_c] + \sum_{i=1}^n [D_s]_i [\varepsilon_s]_i \quad (5.1)$$

Para el caso concreto en el que el elemento está ortogonalmente armado y, a su vez, alineado con los ejes de referencia:

$$\sigma_x = f_{cx} + \rho_x \cdot f_{sx} \quad (5.2)$$

$$\sigma_y = f_{cy} + \rho_y \cdot f_{sy} \quad (5.3)$$

$$\tau_{xy} = v_{cxy} \quad (5.4)$$

Tensiones en las fisuras:

$$f_{c1} = \sum_{i=1}^n \rho_i (f_{scri} - f_{si}) \cdot \cos^2 \theta_{ni} \quad (5.5)$$

$$v_{ci} = \sum_{i=1}^n \rho_i (f_{scri} - f_{si}) \cdot \cos \theta_{ni} \cdot \sin \theta_{ni} \quad (5.6)$$

Tensión límite en las fisuras:

$$f_{c1} \leq \sum_{i=1}^n \rho_i (f_{yi} - f_{si}) \cdot \cos^2 \theta_{ni} \quad (5.7)$$

donde:

$$\theta_{ni} = \theta - \alpha_i$$

$$\theta = \theta_\sigma$$

$[D_c]$  y  $[D_s]_i$  = matrices de rigidez del hormigón y del acero del armado, respectivamente.

**Relaciones de compatibilidad [27].**

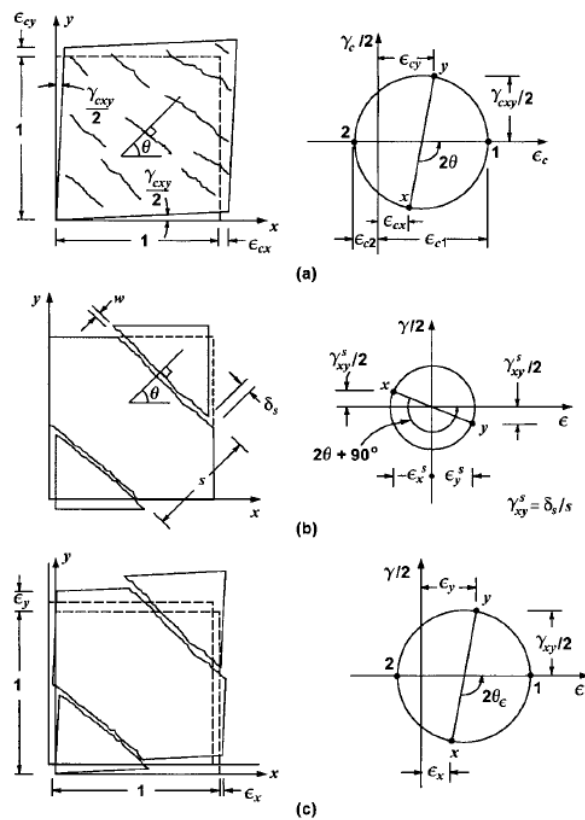


Figura 5.3: Condiciones de compatibilidad: (a) Deformaciones debido a la respuesta constitutiva media (extendida); (b) Deformaciones debidas al deslizamiento de sólido rígido a lo largo de la fisura; (c) Deformaciones combinadas [27].

Deformaciones medias totales  $[\varepsilon]$ :

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_c] + [\varepsilon^s] + [\varepsilon_c^0] \quad (5.8)$$

$$\theta_\varepsilon = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right] \quad (5.9)$$

Deformaciones medias en el hormigón  $[\varepsilon_c]$ :

$$\varepsilon_{c1}, \varepsilon_{c2} = \frac{(\varepsilon_{cx} + \varepsilon_{cy})}{2} \pm \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_{cx} - \varepsilon_{cy})^2 + \gamma_{cxy}^2 \right]^{1/2} \quad (5.10)$$

$$\theta_\sigma = \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ \frac{\gamma_{cxy}}{\varepsilon_{cx} - \varepsilon_{cy}} \right] \quad (5.11)$$

Deformaciones en la fisura por deslizamiento  $[\varepsilon^s]$ :

$$\gamma_s = \frac{\delta_s}{s} \quad (5.12)$$

$$\varepsilon_x^s = -\frac{\gamma_s}{2} \cdot \sin(2\theta) \quad (5.13)$$

$$\varepsilon_y^s = \frac{\gamma_s}{2} \cdot \sin(2\theta) \quad (5.14)$$

$$\gamma_{xy}^s = \frac{\gamma_s}{2} \cdot \cos(2\theta) \quad (5.15)$$

Deformaciones en el armado  $[\varepsilon_s]$ :

$$\varepsilon_{si} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\alpha_i + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\alpha_i + \varepsilon_{si}^0 \quad (5.16)$$

$$\varepsilon_{scri} = \varepsilon_{si} + \Delta\varepsilon_{1cr} \cdot \cos^2 \theta_{ni} \quad (5.17)$$

Oberturas de fisura:

$$w = \varepsilon_{c1} \cdot s \quad (5.18)$$

$$s = \frac{1}{\frac{\sin \theta}{s_x} + \frac{\cos \theta}{s_y}} \quad (5.19)$$

donde las deformaciones por compensación elástica  $[\varepsilon_c^0]$  incluyen efectos debidos a la expansión térmica, expansión mecánica (por ejemplo el efecto Poisson y los áridos alcalinos reactivos) y contracción.

**Relaciones constitutivas [27].**



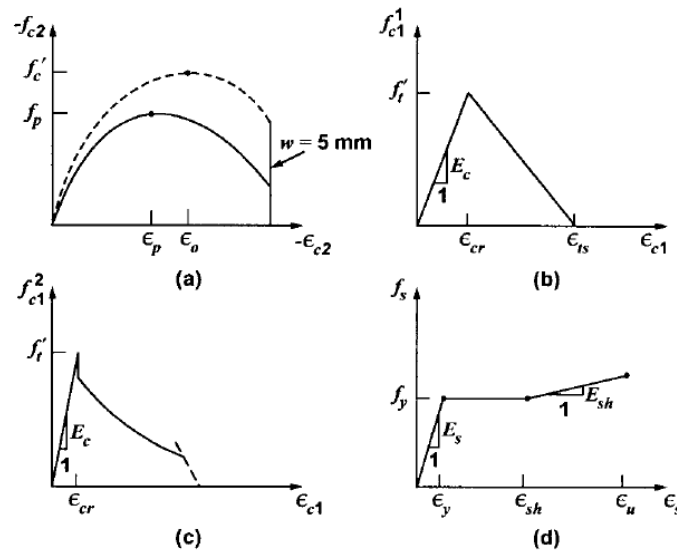


Figura 5.4: Relaciones constitutivas: (a) Modelo de reblandecimiento por compresión; (b) Modelo de reblandecimiento por tracción; (c) Modelo de tracción de Stiffening; (d) Respuesta del armado de acero [27].

Armado:

Tensiones medias:

$$f_s = E_s \varepsilon_s, \quad 0 < \varepsilon_s < \varepsilon_y \quad (5.20a)$$

$$f_s = f_y, \quad \varepsilon_y < \varepsilon_s < \varepsilon_{sh} \quad (5.20b)$$

$$f_s = f_y + E_{sh}(\varepsilon_s - \varepsilon_{sh}), \quad \varepsilon_{sh} < \varepsilon_s < \varepsilon_u \quad (5.20c)$$

$$f_s = f_y, \quad \varepsilon_s > \varepsilon_u \quad (5.20d)$$

Esta formulación, ilustrada en la figura 5.4(d), es la que se usa para el cálculo tanto de las tensiones medias como las locales en las fisuras ( $f_{si}$  y  $f_{scri}$ ), dando lugar a las correspondientes deformaciones del armado ( $\varepsilon_{si}$  y  $\varepsilon_{scri}$ ).

Hormigón:

$$f_{c2} = f_p \cdot \frac{n \cdot (\varepsilon_{c2}/\varepsilon_p)}{(n-1) + (\varepsilon_{c2}/\varepsilon_p)^{nk}} \quad (5.21)$$

$$n = 0.80 - \frac{f_p}{17} \quad (5.22)$$

$$k = 1.0, \quad \varepsilon_p < \varepsilon_{c2} < 0; \quad k = \left(0.67 - \frac{f_p}{62}\right), \quad \varepsilon_{c2} < \varepsilon_p \quad (5.23a,b)$$

Para  $0 < \varepsilon_{c1} < \varepsilon_{cr}$

$$f_{c1} = E_c \varepsilon_{c1} \quad (5.24)$$

Para  $\varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr}$

$$f'_t = 0.65 \cdot (f'_c)^{0.33} \quad (5.25)$$

$$\varepsilon_{ts} = 2.0 \cdot \frac{G_f}{f'_t \cdot L_r} \quad (5.26)$$

$$f_{c1}^a = f'_t \cdot \left[ 1 - \frac{(\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{cr})}{(\varepsilon_{ts} - \varepsilon_{cr})} \right] \quad (5.27)$$

$$f_{c1}^b = \frac{f'_t}{1 + \sqrt{c_t \cdot \varepsilon_{c1}}} \quad (5.28)$$

$$c_t = 2.2 \cdot m \quad (5.29)$$

$$\frac{1}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{4p_i}{d_{b_i}} \cdot |\cos \theta_{n_i}| \quad (5.30)$$

$$f_{c1} = \max(f_{c1}^a, f_{c1}^b) \quad (5.31)$$

Deslizamiento de la fisura:

$$\delta_s = \frac{v_{ci}}{1.8w^{-0.8} + (0.234w^{-0.707} - 0.20) \cdot f_{cc}} \quad (5.32)$$

### 5.1.2. Material hor2dpan [88].

Aquí se presenta la formulación de las ecuaciones constitutivas bidimensionales que caracterizan el comportamiento del hormigón armado en el caso del material llamado *hor2dpan*.

#### Comportamiento del hormigón armado 2D [88].

La ecuación constitutiva adoptada para representar el comportamiento bidimensional del hormigón armado está basada en la propuesta llevada a cabo por Stevens et al. (1991) [89], aunque se han introducido algunas modificaciones basadas en los estudios de Bentz (2000) [90]. Se ha elegido este modelo por tratarse de una ecuación constitutiva que se fundamenta en el modelo del *MCFT* (1986) [23].

La ecuación constitutiva que se describe a continuación incluye en su formulación aspectos tales como:

- Rigidez a tracción del hormigón entre fisuras (*tension-stiffening*)
- Debilitamiento de la resistencia del hormigón en compresión debido a la presencia de deformaciones de tracción ortogonales a ella (*concrete softening*).

El comportamiento bidimensional del hormigón fisurado viene indicado en la figura 5.5, donde se muestra un elemento 2D de hormigón armado y fisurado. Sobre el mismo, actúan unas tensiones normales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , así como una tensión tangencial  $\tau_{xy}$ .

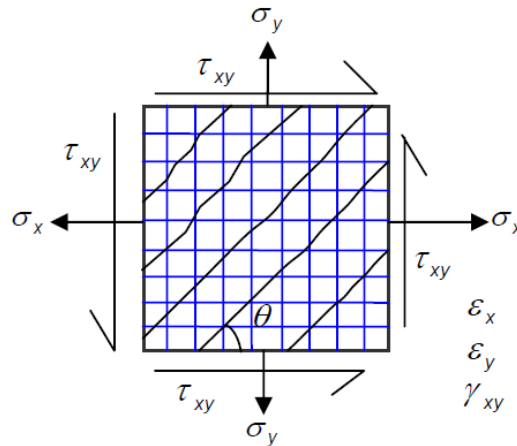


Figura 5.5: Elemento 2D de hormigón armado fisurado [88].

A su vez, este estado genera en el panel un estado de deformaciones regido por las deformaciones  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  (ver figura 5.5)

La respuesta del hormigón fisurado se obtiene como la “unión” del comportamiento del hormigón y del acero. El acero se considera que está embebido en el hormigón y que tiene una adherencia perfecta con el hormigón. En este modelo constitutivo se va a adoptar también la hipótesis de coaxialidad: el ángulo  $\theta$  (ver figura 5.5) que fija la posición de las direcciones principales va a ser el mismo tanto en tensiones como en deformaciones. Esta es la misma simplificación que se lleva a cabo en el *MCFT*.

El hormigón se analiza sumando separadamente el comportamiento unidireccional en cada una de las dos direcciones principales. El comportamiento del hormigón en cada dirección tiene en cuenta no sólo la deformación en la dirección longitudinal  $\varepsilon_L$  considerada sino también la deformación en la dirección transversal  $\varepsilon_T$ . De este modo, se trata de captar el efecto del debilitamiento del hormigón a compresión.

El acero se analiza como la suma de comportamiento en las diferentes direcciones de armado que presente. En general, se consideran dos familias de armado, una en dirección  $x$  y otra en dirección  $y$  (ver figura 5.5).

### **Ecuación constitutiva del hormigón 1D [88].**

#### **Comportamiento en compresión [88].**

Aunque se sigue básicamente la ecuación constitutiva según Stevens et al. (1991) [89], se opta por sustituir el comportamiento del hormigón en compresión por la propuesta de Popovics (1973) [91] (ver figura 5.6).

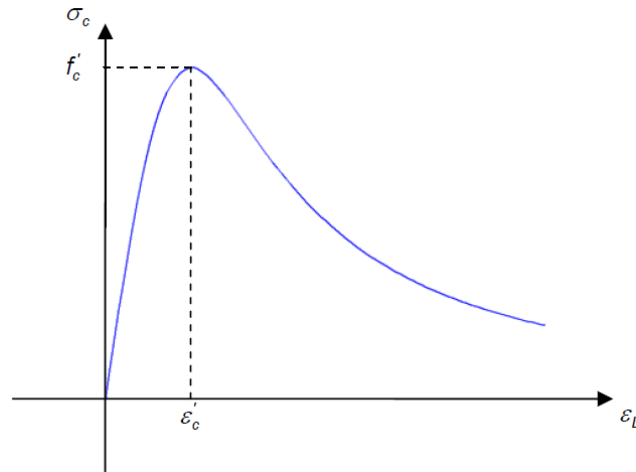


Figura 5.6: Ecuación constitutiva del hormigón en compresión [88].

A continuación se presenta esta ecuación constitutiva que fue utilizada con éxito en el modelo de cálculo seccional de Bentz (2000) [90].

$$\sigma_c(\varepsilon_L) = \frac{n \cdot (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)}{n - 1 + (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)^{n-k}} \cdot f'_c \quad (5.33)$$

donde:

$$n = 0.8 + f'_c / 17$$

$$k = 1 \quad \text{si } \varepsilon_L / \varepsilon'_c \leq 1$$

$$k = 0.67 + f'_c / 62 \quad \text{si } \varepsilon_L / \varepsilon'_c > 1$$

$f'_c$  : tensión máxima a compresión del hormigón en probeta cilíndrica.

$\varepsilon'_c$  : deformación correspondiente a la tensión  $f'_c$

$n$  : parámetro de ajuste de la curva

$k$  : factor que controla la pérdida de tensión post-rotura para hormigones de alta resistencia

Con el fin de tener en cuenta el efecto del debilitamiento de la tensión de compresión del hormigón debido a la presencia de deformaciones en dirección transversal (tal y como se hace en el *DSFM*), se afecta a la expresión anterior de un coeficiente multiplicador de debilitamiento que vamos a llamar de ahora en adelante *SF* (*Softening Factor*). De este modo, se expresa la tensión del hormigón como:

$$\sigma_c(\varepsilon_L, \varepsilon_T) = SF(\varepsilon_T) \frac{n \cdot (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)}{n - 1 + (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)^{n-k}} \cdot f'_c \quad (5.34)$$

La formulación utilizada para representar este coeficiente se toma del modelo de Stevens et al. (1991) [89]. Este coeficiente depende sólo de la deformación transversal y adopta la siguiente formulación (ver figura 5.7):

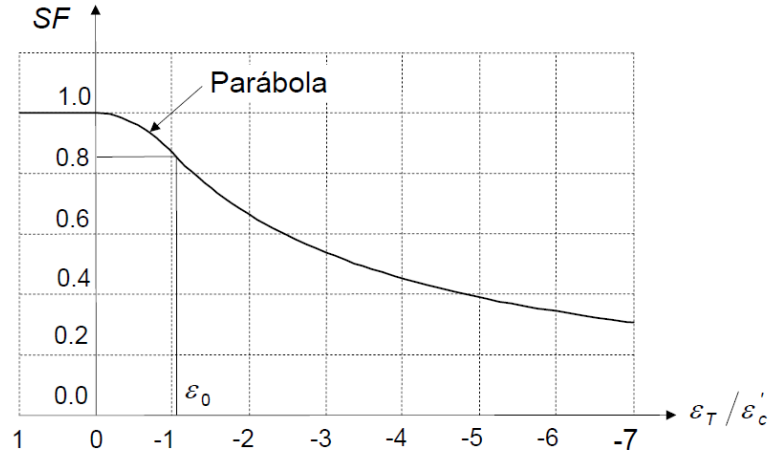


Figura 5.7: Coeficiente de debilitamiento de la tensión de compresión ( $SF$ ) [88].

$$SF(\varepsilon_T) = 1 \quad \text{si } \varepsilon_T < 0 \quad \text{No hay debilitamiento.} \quad (5.35)$$

$$SF(\varepsilon_T) = \frac{1}{0.8 - 0.34 \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon'_c}} \quad \text{si } \varepsilon_0 \leq \varepsilon_T \quad \text{siendo } \varepsilon_0 = -1.03857 \varepsilon'_c \quad (5.36)$$

Entre las dos curvas anteriores se adopta un ajuste parabólico con el fin de evitar problemas numéricos.

$$SF(\varepsilon_T) = 1 + \frac{0.34}{2\varepsilon'_c \varepsilon_0 (0.8 - 0.34 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'_c})^2} \cdot \varepsilon_T^2 \quad \text{si } 0 \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_T \quad (5.37)$$

Para facilitar la implementación en una formulación en rigidez tangente se van a derivar las expresiones de la tensión de compresión del hormigón y del coeficiente de debilitamiento.

Las derivadas correspondientes a la tensión del hormigón  $\sigma_c$  son:

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_L} = SF(\varepsilon_T) \cdot \frac{n f'_c n - 1 + (1 - n \cdot k) \cdot (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)^{n-k}}{\varepsilon'_c (n - 1 + (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)^{n-k})^2} \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_T} = \frac{\partial SF}{\partial \varepsilon_T} \cdot \frac{n(\varepsilon_L / \varepsilon'_c)}{n - 1 + (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)^{n-k}} \cdot f'_c \quad (5.39)$$

siendo las derivadas correspondientes al coeficiente de debilitamiento  $SF$ :

$$\frac{\partial SF}{\partial \varepsilon_T} = 0 \quad \text{si } \varepsilon_T < 0 \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial SF}{\partial \varepsilon_T} = \frac{0.34}{\varepsilon'_c (0.8 - 0.34 \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon'_c})^2} \quad \text{si } \varepsilon_0 \leq \varepsilon_T \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial SF}{\partial \varepsilon_T} = \frac{0.34 \varepsilon_T}{\varepsilon'_c \varepsilon_0 (0.8 - 0.34 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'_c})^2} \quad \text{si } 0 \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_T \quad (5.42)$$

### **Comportamiento en tracción [88].**

Siguiendo la formulación presentada por Stevens et al. (1991) [89], se considera la siguiente relación constitutiva para el hormigón en tracción representada en la figura 5.8.

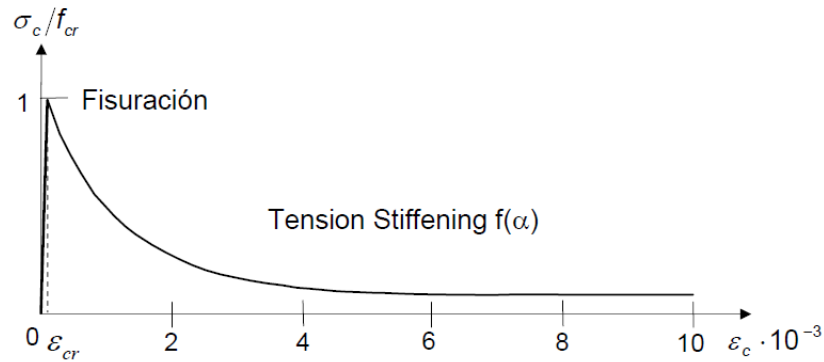


Figura 5.8: Ecuación constitutiva del hormigón 1D en tracción [88].

El hormigón se considera con comportamiento lineal y no fisurado en tracción si su deformación es menor que la deformación de fisuración  $\varepsilon_{cr}$ . A esta deformación le corresponde una tensión del hormigón igual a su resistencia a tracción  $f_{cr}$ . Por lo tanto:

$$\sigma_c(\varepsilon_L) = \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_{cr}} \cdot f_{cr} \quad \text{si } 0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_{cr} \quad (5.43)$$

de modo que:

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_L} = \frac{f_{cr}}{\varepsilon_{cr}}$$

Tras la fisuración  $\varepsilon_{cr} < \varepsilon_L$ , se adopta la siguiente rama de tracción (ver figura 5.8):

$$\sigma_c(\varepsilon_L) = f_{cr} \cdot ((1 - \alpha) \cdot e^{-\lambda_t(\varepsilon_L - \varepsilon_{cr})} + \alpha) \quad (5.44)$$

siendo:

$\alpha$  el parámetro para tener en cuenta el comportamiento adherente entre el acero y el hormigón suponiendo adherencia perfecta. Se calcula como sigue:

$$\alpha = C_t \cdot \frac{\rho_s}{d_b} \quad (5.45)$$

$C_t = 50$  mm, según los datos obtenidos experimentalmente

$\rho_s$  = es la cuantía de armadura

$d_b$  = es el diámetro de las armaduras en mm

$\lambda_t$  es el parámetro que controla la disminución de la tensión de tracción del hormigón:

$$\lambda_t = \frac{270}{\sqrt{\alpha}} \leq 1000 \quad (5.46)$$

El parámetro  $\alpha$  se ha obtenido suponiendo que existe exclusivamente una familia de armaduras y con una orientación coincidente con la dirección de la deformación longitudinal  $\varepsilon_L$ . Por lo general, podrán existir varias familias de armaduras y con direcciones prefijadas e

independientes de las direcciones principales de deformaciones. Por lo tanto, se redefine de forma general el parámetro  $\alpha$  como sigue:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n [\cos^2 \Delta\theta_i + \sin^2 (\frac{4 \cdot \Delta\theta_i^2}{\pi})] \alpha_i \quad (5.47)$$

donde:

$n$ : número de grupos de armaduras (por lo general, serán 1 ó 2 siguiendo las direcciones  $x$  e  $y$ )

$\Delta\theta_i$  = ángulo entre la dirección del grupo  $i$  de armaduras y la dirección principal en la que se evalúa la tensión en el hormigón.

En este caso, se realizan derivadas respecto de las dos deformaciones principales y también respecto de la deformación transversal expresada en direcciones principales  $\gamma_{LT}$ :

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_L} = -f_{cr} \lambda_t (1 - \alpha) e^{-\lambda_t (\varepsilon_L - \varepsilon_{cr})} \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_T} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \gamma_{LT}} = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_{LT}}$$

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \alpha} = f_{cr} \cdot [-e^{-\lambda_t (\varepsilon_L - \varepsilon_{cr})} - (1 - \alpha) e^{-\lambda_t (\varepsilon_L - \varepsilon_{cr})} \cdot (\varepsilon_L - \varepsilon_{cr}) \cdot \frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha} + 1]$$

si  $\lambda_t \leq 1000$   $\frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha} = \frac{-135}{\sqrt{\alpha^3}}$  y  $\frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha} = 0$  para el resto de casos.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n [-\sin(2\Delta\theta_i) + \frac{8\Delta\theta_i^2}{\pi} \sin(\frac{8\Delta\theta_i^2}{\pi})] \cdot \alpha_i$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \gamma_{LT}} = \frac{1}{2 \cdot (\varepsilon_L - \varepsilon_T)}$$

### Ecuación constitutiva del acero embebido en el hormigón [88].

Stevens et al. (1991) [89] elimina de la formulación original del *MCFT* el denominado chequeo de la fisura (*crack check*). En su defecto, trabaja con tensiones medias en las armaduras y desprecia las variaciones de tensiones que se producen por el hecho de estar en una fisura o entre fisuras.

La ecuación constitutiva de este acero se basa en un comportamiento bilineal afectado por una reducción de las tensiones con el fin de tener en cuenta la presencia del acero embebido en el hormigón (ver figura 5.9).

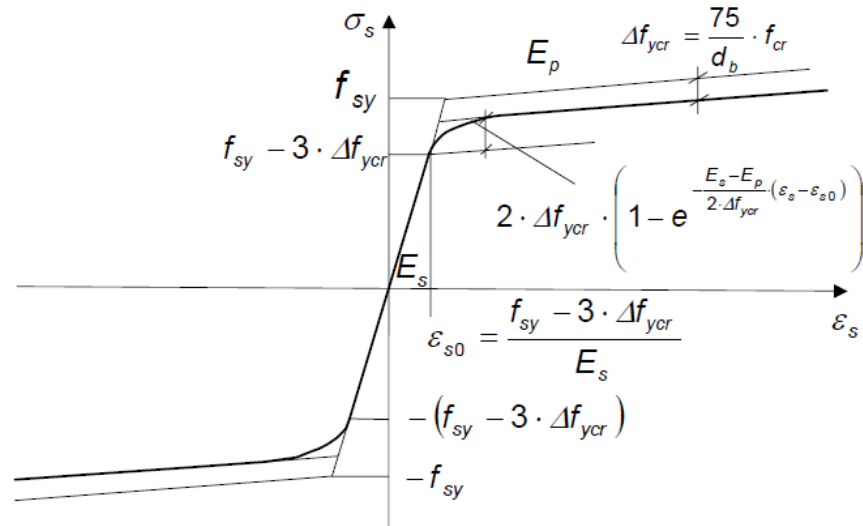


Figura 5.9: Ecuación constitutiva del acero embebido en el hormigón [88].

Las ecuaciones de cada una de las dos ramas del diagrama son:

Rama elástica:  $|\epsilon_s| < \epsilon_{s0}$

$$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s \quad (5.49 \text{ a})$$

$$E_s = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \epsilon_s} \quad (5.49 \text{ b})$$

Rama de plastificación:  $\epsilon_{s0} \leq |\epsilon_s|$

$$\sigma_s = \text{sgn}(\epsilon_s) \cdot [E_s \cdot \epsilon_{s0} + 2\Delta f_{ycr} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E_s - E_p}{2 \cdot \Delta f_{ycr}} (|\epsilon_s| - \epsilon_{s0})}\right) + E_p \cdot (|\epsilon_s| - \epsilon_{s0})] \quad (5.50 \text{ a})$$

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial \epsilon_s} = E_p + (E_s - E_p) \cdot e^{-\frac{E_s - E_p}{2 \cdot \Delta f_{ycr}} (|\epsilon_s| - \epsilon_{s0})} \quad (5.50 \text{ b})$$

### Comportamiento bidimensional del hormigón armado [88].

El comportamiento bidimensional del hormigón armado en tensión plana viene regido por los siguientes vectores de tensiones y deformaciones:

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon}_p = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Tal y como se menciona anteriormente, el comportamiento del hormigón se obtiene como la suma de la respuesta del hormigón en sus dos direcciones principales. El comportamiento de los aceros se considera en cada una de las direcciones de armado presentes. En la presentación de esta formulación se consideran únicamente dos familias de armadura según las direcciones cartesianas x e y, resultando:



$$\boldsymbol{\sigma}_p = \boldsymbol{\sigma}_{cp} + \boldsymbol{\sigma}_{sp} \quad (5.52)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{cx} \\ \sigma_{cy} \\ \tau_{cxy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_{sx} \cdot \sigma_{sx} \\ \rho_{sy} \cdot \sigma_{sy} \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde:

$\rho_{sx}$ ,  $\rho_{sy}$  son las cuantías de armado en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente.

A su vez, si se deriva el vector de tensiones del panel con respecto al vector de deformaciones del panel se obtiene la matriz de rigidez tangente del material:

$$d\boldsymbol{\sigma}_p = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{D}_p d\boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (5.53 a)$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\boldsymbol{\sigma}_{cp} + \boldsymbol{\sigma}_{sp})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{cp}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{sp}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} \right) d\boldsymbol{\varepsilon}_p = (\mathbf{D}_{cp} + \mathbf{D}_{sp}) d\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{D}_{cp} + \mathbf{D}_{sp} \quad (5.53 b)$$

Quedando de forma desarrollada como:

$$\mathbf{D}_{cp} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{cx}}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \sigma_{cx}}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \sigma_{cx}}{\partial \gamma_{xy}} \\ \frac{\partial \sigma_{cy}}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \sigma_{cy}}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \sigma_{cy}}{\partial \gamma_{xy}} \\ \frac{\partial \tau_{cxy}}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \tau_{cxy}}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \tau_{cxy}}{\partial \gamma_{xy}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{sp} = \begin{bmatrix} \rho_{sx} \frac{\partial \sigma_{sx}}{\partial \varepsilon_x} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{sy} \frac{\partial \sigma_{sy}}{\partial \varepsilon_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.53 c)$$

Se puede observar, para el vector de tensiones de las armaduras y su correspondiente matriz de rigidez, que sólo se necesita conocer el valor de las cuantías de cada familia de armaduras así como el comportamiento unidimensional del acero de cada una de ellas. Dado que la ecuación constitutiva del acero ya se conoce y que las cuantías son un dato de partida, la evaluación de la respuesta bidimensional del acero es directa.

En cuanto al hormigón, resulta más conveniente cambiar el sistema de coordenadas. Se va a pasar del sistema cartesiano  $xy$  a un sistema de coordenadas que sigue las direcciones principales que se van a llamar 1 y 2.

Los nuevos vectores de tensiones en el hormigón y de deformación en direcciones principales son:

$$\boldsymbol{\sigma}_{c,prin} = \begin{bmatrix} \sigma_{c1} \\ \sigma_{c2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{prin} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} = 0 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Se considera siempre que  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ .

Del mismo modo, la matriz de rigidez del hormigón se puede también expresar en direcciones principales como sigue:

$$D_{c,prin} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{c1}}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial \sigma_{c1}}{\partial \varepsilon_2} & \frac{\partial \sigma_{c1}}{\partial \gamma_{12}} \\ \frac{\partial \sigma_{c2}}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial \sigma_{c2}}{\partial \varepsilon_2} & \frac{\partial \sigma_{c2}}{\partial \gamma_{12}} \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{c1} - \sigma_{c2}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

La respuesta del hormigón en las dos direcciones principales sigue un comportamiento unidimensional y se puede emplear la formulación para el hormigón 1D descrita anteriormente. Es importante destacar que la respuesta de cada uno de los hormigones depende, por una parte, de la deformación en la dirección principal considerada y, por otra, de la deformación transversal. Cabe recordar que la deformación transversal hay que tenerla en cuenta con el fin de captar el efecto del debilitamiento en el hormigón a través del coeficiente SF. En resumen, se aplica la ecuación constitutiva 1D del hormigón en las dos direcciones principales según se indica la tabla 5.1.

Tabla 5.1. Deformaciones consideradas para cada hormigón 1D [88].

Hormigón	Def. Longitudinal: $\varepsilon_L$	Def. Transversal: $\varepsilon_T$
Dirección 1: $\sigma_{c1}, \frac{\partial \sigma_{c1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{prin}}$	$\varepsilon_L = \varepsilon_1$	$\varepsilon_T = \varepsilon_2$
Dirección 2: $\sigma_{c2}, \frac{\partial \sigma_{c2}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{prin}}$	$\varepsilon_L = \varepsilon_2$	$\varepsilon_T = \varepsilon_1$

Por lo general, en las filas 2 y 3 de la matriz de rigidez los términos son no nulos dada la naturaleza de las derivadas de la tensión del hormigón obtenidas.

Por último, hay que indicar que la única componente en la fila 3 de la matriz de rigidez del hormigón es la correspondiente a la columna 3, por haber impuesto la condición de coaxialidad al asumir el mismo ángulo para las direcciones principales en deformaciones y en tensiones.

Con el fin de completar de una forma consistente la formulación faltan por establecer las relaciones entre las tensiones y las matrices de rigidez que permitan pasar del sistema de coordenadas en direcciones principales 12 al sistema cartesiano en direcciones xy.

La relación entre las deformaciones se puede calcular de manera directa utilizando el círculo de Mohr (ver figura 5.10).

$$\varepsilon_1 = C + R \quad \varepsilon_2 = C - R \quad (5.56)$$

siendo:

$$C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

y el ángulo  $\theta_2$  entre la dirección principal  $\varepsilon_1$  y el eje  $y$  es:

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$$

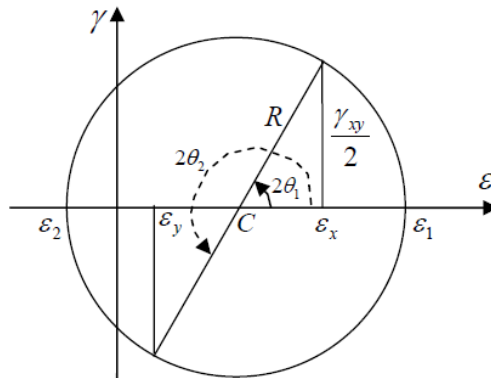


Figura 5.10: Círculo de Mohr para la obtención de las direcciones principales [88].

Los vectores de tensiones y las matrices de rigidez en coordenadas cartesianas se relacionan con las obtenidas en direcciones principales a partir de la correspondiente matriz de cambio de coordenadas  $T$ :

$$\sigma_{cp} = T^T \cdot \sigma_{c,prin} \quad (5.57)$$

$$D_{cp} = T^T \cdot D_{c,prin} \cdot T \quad (5.58)$$

siendo:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 & \sin^2 \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_1 \\ \sin^2 \theta_1 & \cos^2 \theta_1 & -\cos \theta_1 \sin \theta_1 \\ -2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 & 2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 & (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) \end{bmatrix}$$

### Validación experimental del modelo *hor2dpan* [88].

En la tesis doctoral del profesor Juan Navarro [88] se realiza una validación experimental del modelo que aquí se nombra como modelo *hor2dpan*.

Para ello, la ecuación constitutiva de Stevens et al. (1991) [89] se validó mediante una serie de ensayos experimentales de paneles de hormigón armado. Se obtuvieron unos resultados suficientemente satisfactorios que han permitido utilizar esta ecuación constitutiva en los modelos teóricos. El modelo constitutivo propuesto difiere del original en cuanto a la rama de compresión del hormigón, ya que se ha tomado para esta rama la propuesta por Popovis (1973) [91] al igual que Bentz (2000) [90]. Por ello, se repite la validación numérica de la ecuación constitutiva utilizando la misma serie de ensayos de paneles de hormigón armado.

La verificación experimental está compuesta por dos series (PV y PB) de paneles de hormigón armado ensayados bajo diferentes combinaciones de acciones en su propio plano. Se verifican un total de diecisiete probetas de la serie PV y otras veinte de la serie PB. La serie PV se debe a Vecchio y Collins (1982) [87] y la serie PB a Bhide y Collins (1987) [92].

### 5.1.3. Material MatJ2

El modelo que se utiliza es el de un material no lineal con comportamiento elastoplástico correspondiente al modelo de plasticidad J2. Este modelo constitutivo es adecuado para simular el comportamiento de elementos estructurales de acero sometidos a cargas monótonas y crecientes e incluso para simular la respuesta cíclica del material mediante la introducción de un efecto de endurecimiento dinámico no lineal. Aquí se emplea la versión generalizada del modelo de plasticidad J2 según Lubliner et al. (1993) [95]. La formulación referente a esta ecuación constitutiva puede ser consultada en la referencia anterior, o bien, en la tesis doctoral de Saritas (2006) [96]. Además, se utiliza la implementación numérica de esta ecuación constitutiva en FEDEASLab por cortesía de Filippou (UC Berkeley).

Los parámetros necesarios para determinar esta ecuación constitutiva son:

- (1) Módulo de Young ( $E$ )
- (2) Límite elástico ( $f_y$ )
- (3) Coeficiente de Poisson ( $\nu$ )
- (4) Módulo de endurecimiento isotrópico ( $H_i$ )
- (5) Módulo de endurecimiento dinámico ( $H_k$ )

### 5.1.4. Material DSFM-Ser.

El DSFM-Ser es el modelo de material que se usa para modelar el comportamiento del hormigón armado y reforzado con fibras de acero.

El hormigón armado y con fibras de acero en la matriz presenta ciertas propiedades que no tiene el hormigón armado tradicional. Las fibras de acero dotan al hormigón de mayor isotropía y homogeneidad. Esto se traduce en un hormigón con mayor resistencia a tracción, con mayor tenacidad, mayor ductilidad tras la fisuración, mayor resistencia al impacto y una retracción más controlada. Por otra parte, la presencia de fibras metálicas en el hormigón apenas modifica su resistencia a compresión y su módulo de elasticidad [39].

Para modelar el comportamiento constitutivo del hormigón armado y reforzado con fibras se tiene en cuenta, para el comportamiento a compresión, el material *DSFM* ya descrito en este capítulo y, para el comportamiento a tracción, el modelo constitutivo de Serna y Fuster [39].

La determinación del modelo constitutivo de Serna y Fuster [39], se obtiene a partir de ensayos de flexión. Para ello se lleva a cabo un análisis inverso (ver explicación de este método en el punto 5.2.2) según el cual se modela el comportamiento a la tracción, obtenido de forma experimental, y se determinan los parámetros del modelo a partir de los resultados de ensayos a flexión mediante un programa numérico de elementos finitos.

La forma del modelo constitutivo uni-axial que se obtiene es del tipo tensión-deformación ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) continuo a tramos, tal y como se representa en la figura 5.11:

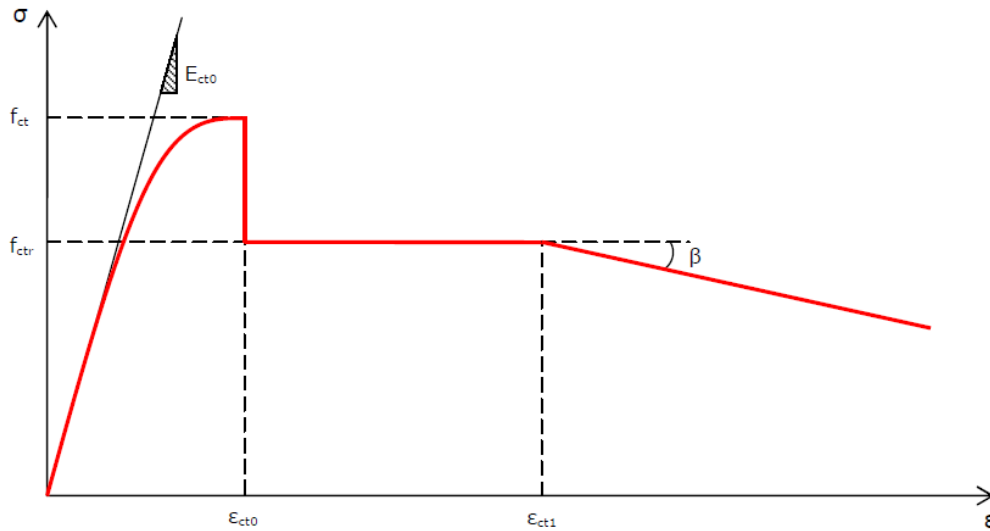


Figura 5.11: Modelo constitutivo del comportamiento a tracción de los HRFA propuesto por Serna y Fuster [39].

Se toma como ecuación de la curva tensión-deformación en la rama ascendente de la curva de tracción del compuesto fibroso la fórmula general de Sargin [93]:

tracción:

$$\sigma_{ct} = f_{ct} \cdot \frac{k_{bt} \cdot \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_{bt} - 2) \bar{\varepsilon}} \quad (5.59)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ct0}} \quad ; \quad k_{bt} = \frac{\varepsilon_{ct0} \cdot E_{ct0}}{f_{ct}}$$

donde  $E_{ct0}$  es el modulo de elasticidad tangente a tracción del hormigón con fibras,  $\varepsilon_{ct0}$  la deformación para la que la resistencia a tracción del compuesto fibroso es máxima ( $f_{ct}$ ).

Una vez alcanzada la resistencia máxima a tracción la matriz fisura y se experimenta un decremento rápido de la resistencia hasta alcanzar la tensión correspondiente a la tensión residual  $f_{ctr}$ :

$$f_{ctr} = \alpha \cdot f_{ct} \quad (5.60)$$

Este escalón de resistencia residual se mantiene constante hasta alcanzar la deformación límite  $\varepsilon_{ct1}$ , para luego disminuir linealmente con una pendiente de relajación  $\beta$ .

Los parámetros  $E_{ct0}$ ,  $\varepsilon_{ct0}$  y  $f_{ct}$  se obtienen de forma experimental a partir del ensayo de flexotracción. El valor de la resistencia a tracción  $f_{ct}$  se obtiene de los ensayos de flexo-tracción empleando el Análisis Inverso (tal y como se explica en el punto 5.2.2. de este mismo capítulo) Por consiguiente, quedan por definir los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\varepsilon_{ct0}$  para la determinación completa de la curva de tracción.

Haciendo variar este trío de parámetros, se modifica la curva del modelo constitutivo y, en consecuencia, se modifica la respuesta numérica. Es decir, se modifica la curva teórica de

flexotracción, que deberá parecerse lo más posible a la curva experimental de flexotracción del hormigón de fibras considerado.

El valor óptimo de este trío de parámetros que adapta la respuesta numérica a la experimental, se calcula con un Análisis Inverso (ver explicación de este método en el punto 5.2.2).

Por tanto, el proceso que se sigue para la definición del material DSFM-Ser es el siguiente:

1. Se realiza, de forma experimental el ensayo de flexo-tracción de las probetas de hormigón armado y reforzado con fibras de acero (ver punto 3.2.2.2 del capítulo 3: programa experimental). Se trata de un tipo de ensayo para la modelización 1D. De aquí se obtiene la curva experimental del comportamiento 1D a tracción del hormigón armado reforzado con fibras de acero (HARF). Se muestra como ejemplo en la figura 5.12 la curva P-CMOD para la dosificación J2-2.

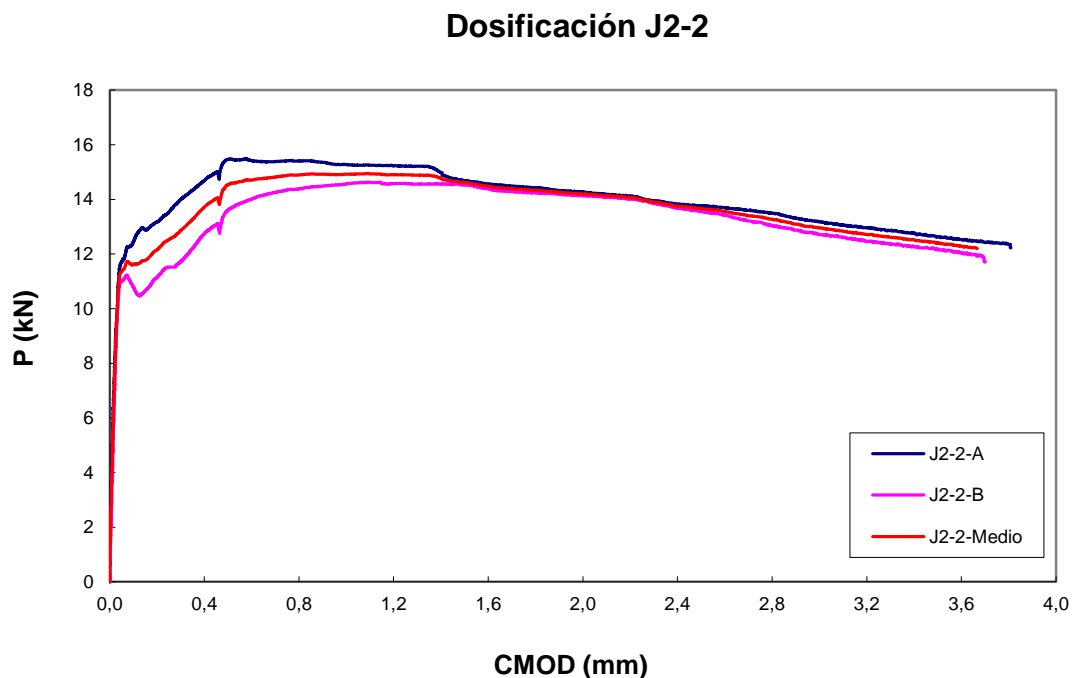


Figura 5.12 : Curvas medias carga-abertura de fisura (CMOD) experimentales de las probetas J2-2-A, J2-2-B y su valor medio.

2. A partir de aquí, se realiza el Análisis Inverso con la ayuda del programa FEDEASLab por cortesía de Filippou (UC Berkeley) y se calibran los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\varepsilon_{ct0}$  del modelo constitutivo de Serna-Fuster para la curva de tracción del HARF, hasta ajustar una curva teórica 1D a la curva experimental 1D obtenida en el punto 1. Esto se realiza mediante un proceso iterativo de ajuste (tal y como se explica en el punto 5.2.2. de este mismo capítulo). Se van calibrando los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\varepsilon_{ct0}$  hasta que la diferencia entre la curva experimental y la teórica es menor que un valor determinado. En la figura 5.13 se muestra el ajuste obtenido con la ayuda del programa Matlab.

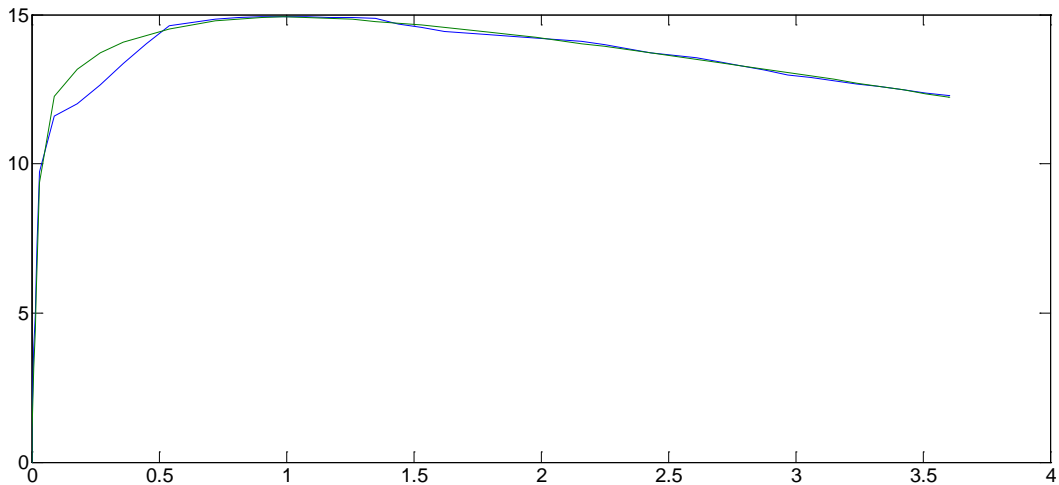


Figura 5.13 : Representación del ajuste con el programa Matlab donde se representa la curva P-CMOD experimental (azul) y la curva P-CMOD teórica (verde) para la probeta Z-HF-3F18-NF.

Por tanto, con esto se obtiene la curva teórica 1D para la tracción del HARF.

En la tabla 5.2 se muestran los parámetros obtenidos tras el ajuste para cada una de las probetas.

Tabla 5.2: Parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon_{ct0}$  y  $f_{ct}$  obtenidos para las distintas probetas

Probetas	$\alpha$	$\beta$	$\varepsilon_{ct0}$	$f_{ct}$ (MPa)
Z-HF-3F18-NF	0.6013	$1.4880 \cdot 10^7$	0.0151	2.7989
Z-HF-2F18-NF	0.5791	$1.1608 \cdot 10^7$	0.0047	2.7033
Z-HF-0F18-NF	0.5834	$2.2752 \cdot 10^7$	0.0215	3.1067

3. Se define el material 2D DSFM-Ser para modelar el comportamiento material de las probetas tipo *push-off* con HARF. Este material consta del comportamiento constitutivo del material DSFM (visto en el punto 5.1.1 de este mismo capítulo) en compresión y del comportamiento constitutivo Serna-Fuster en tracción. Se trata de la composición del comportamiento 1D en dos direcciones. Por ello, constituye un comportamiento 2D. Con este material ya se pueden obtener las curvas  $\tau/f_c - \varepsilon, \gamma$  numéricas que se muestran en el capítulo 6.

4. Como se dispone de las curvas  $\tau/f_c - \varepsilon, \gamma$  experimentales del capítulo 4: programa experimental, se pueden realizar la comparación con las curvas  $\tau/f_c - \varepsilon, \gamma$  numéricas que se muestran en el capítulo 6.

### 5.1.5. Material Acero

En este apartado se presenta la ecuación constitutiva para el acero cuando se considere el armado de forma discreta.

#### Comportamiento del acero 1D [88].

El modelo constitutivo del acero 1D, que se emplea para las armaduras pasivas longitudinales que se consideran de forma discreta, está basado en un diagrama bilineal con rama de plastificación tanto en tracción como en compresión (ver figura 5.14).

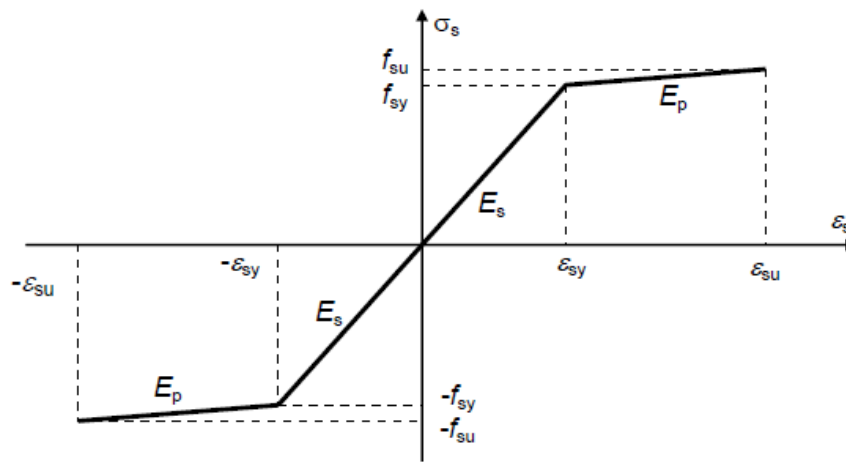


Figura 5.14: Ecuación constitutiva del acero 1D [88].

donde:

$\epsilon_s$  : deformación del acero

$\sigma_s$  : tensión del acero

$f_{sy}$  : límite elástico del acero

$f_{su}$  : tensión de rotura del acero

$E_s$  : módulo de elasticidad del acero

$\epsilon_{su}$  : deformación del acero en rotura

$E_p$  : módulo de deformación (en la rama de plastificación)

$\epsilon_{sy}$  : deformación del acero correspondiente al límite elástico

Estos dos últimos parámetros se obtienen en función del resto como sigue:

$$\epsilon_{sy} = \frac{f_{sy}}{E_s} \quad (5.61)$$



$$E_p = \frac{f_{su} - f_{sy}}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sy}} \quad (5.62)$$

Las ecuaciones que describen cada una de las ramas del diagrama son:

Rama elástica:  $|\varepsilon_s| < \varepsilon_{sy}$

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad (5.63)$$

$$E_s = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon_s} \quad (5.64)$$

Rama plástica:  $\varepsilon_{sy} < |\varepsilon_s| < \varepsilon_{su}$

$$\sigma_s = \text{sgn}(\varepsilon_s) \cdot [f_{sy} + E_p (|\varepsilon_s| - \varepsilon_{sy})] \quad (5.65)$$

$$E_s = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon_s} \quad (5.66)$$

Con el fin de captar el efecto de *tension-stiffening* por estar el acero embebido en el hormigón se lleva a cabo una reducción de la tensión del acero en la ecuación constitutiva propuesta. Esta reducción de tensiones se realiza igual que para el acero del hormigón armado 2D según se presenta más adelante en este mismo apartado.

## 5.2. Métodos para la determinación de los parámetros constitutivos

### 5.2.1. Análisis inverso y análisis directo en el hormigón armado y reforzado con fibras de acero

El análisis inverso y el análisis directo son procedimientos que permiten obtener un modelo constitutivo válido que describa el comportamiento a tracción de un determinado hormigón reforzado con fibras. Estos análisis sirven para obtener tanto una curva tensión-abertura de fisura ( $\sigma-w$ ) como una curva tensión-deformación ( $\sigma-\varepsilon$ ). En la figura 5.15 se representa un diagrama de flujos en el que se esquematizan los planteamientos inverso y directo [34] y [97].

El análisis inverso utiliza los resultados experimentales de los ensayos para ajustar los valores de la ecuación constitutiva del material (tipo  $\sigma-w$  o  $\sigma-\varepsilon$ ), cuya forma se ha predefinido. El planteamiento consiste en obtener los parámetros que definen la ecuación constitutiva del hormigón de fibras, variándolos de forma que la respuesta teórica del elemento obtenida numéricamente se ajuste a los resultados experimentales. Es un proceso iterativo y su método se explica detalladamente en el siguiente punto 5.2.2.

El análisis directo fija la forma de una ecuación constitutiva (tipo  $\sigma-w$  o  $\sigma-\varepsilon$ ) para simular la respuesta a tracción del HRFA (SFRC). Los parámetros constitutivos de estas ecuaciones pueden definirse experimentalmente o se pueden fijar a partir de ciertas propiedades de las fibras empleadas, del hormigón utilizado, etc. No es un proceso iterativo. Fijada la ecuación constitutiva y el resto de variables se ejecuta el algoritmo de cálculo y se obtiene la respuesta tenso-deformacional de los materiales constituyentes de la sección. Se puede integrar la respuesta de cada sección para obtener el comportamiento global del elemento. Luego se pueden comparar los resultados obtenidos numéricamente con los experimentales.

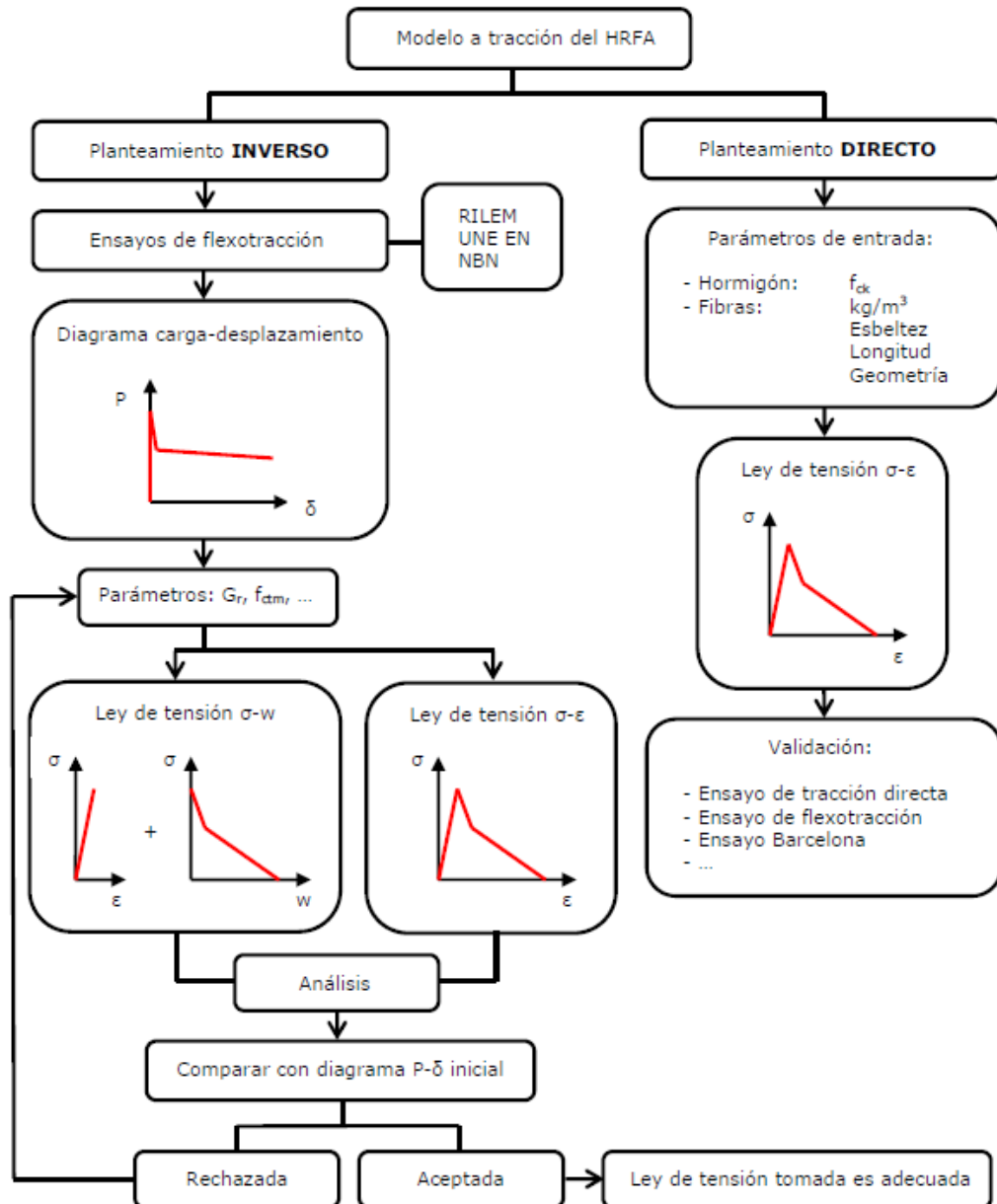


Figura 5.15: Planteamientos para la obtención del modelo constitutivo del hormigón armado con fibras [97].

En este trabajo, la determinación de los materiales 2D que se usan para modelar el comportamiento constitutivo del hormigón armado: DSFM, hor2dpan y MatJ2 se lleva a cabo mediante el análisis directo, mientras que la determinación del material 2D DSFM-Ser para modelar el comportamiento constitutivo a tracción del hormigón armado y reforzado con fibras de acero se usa el análisis inverso.

### 5.2.2. Análisis inverso para la obtención del comportamiento constitutivo a tracción del DSFM-Ser

El Análisis Inverso suele utilizarse para definir algunos parámetros de los modelos constitutivos a tracción de los HRFA (SFRC), mediante una comparación entre la curva carga-

desplazamiento teórica del análisis y la curva carga-desplazamiento experimental de los ensayos de flexo-tracción.

El primer paso del Análisis Inverso es definir los datos iniciales del ensayo, como la geometría y el comportamiento uni-axial del material. Los datos geométricos son el canto  $h$  de la probeta, la profundidad  $a$  de la entalla, el ancho  $b$  y la luz  $L$  de la probeta (ver figura 5.16). El comportamiento uni-axial del material está definido por:

- Un diagrama tensión-deformación ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) en compresión, obtenido con datos procedentes de ensayos de compresión.
- Un diagrama tensión-deformación ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) a tracción para el comportamiento elástico del SFRC. El valor de la resistencia a tracción  $f_{ct}$  se obtiene de los ensayos de flexo-tracción empleando el Análisis Inverso, tal y como se expone más adelante.
- Una relación tensión abertura ( $\sigma$ - $w$ ) o tensión-deformación ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) para la fase post-fisuración, definida por unos parámetros que se determinan y se ajustan por Análisis Inverso.

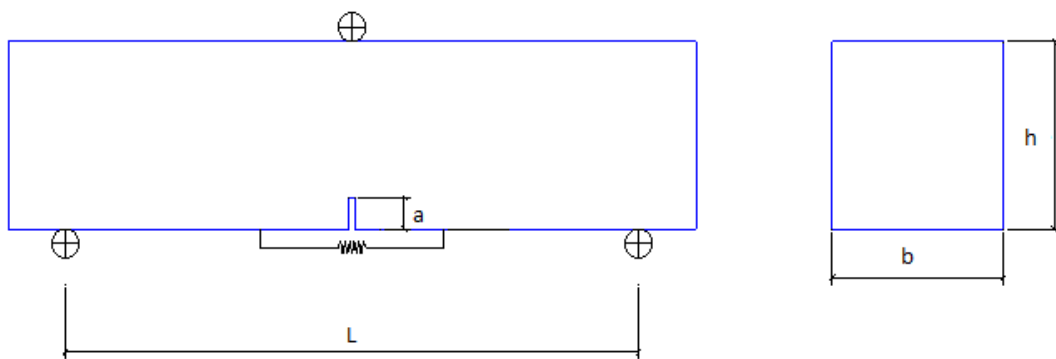


Figura 5.16: Datos geométricos de la probeta para el ensayo de flexo-tracción.

El segundo paso es simular numéricamente el proceso de rotura o bien la forma de fisurar de la probeta. En el análisis se emplea el concepto de multicapas (o fibras) el cual se explica a continuación:

- La probeta se divide en dos mitades, conectadas por medio de muelles por encima de la entalla. Cada muelle representa el comportamiento de una pequeña capa y se asume que la distribución de los desplazamientos o de las deformaciones (éstas están relacionadas con los desplazamientos del captador  $\delta_{capt}$  por medio de su longitud o distancia entre los puntos de medición en los dos lados de la entalla) es lineal en el canto efectivo del elemento (ver figura 5.17).

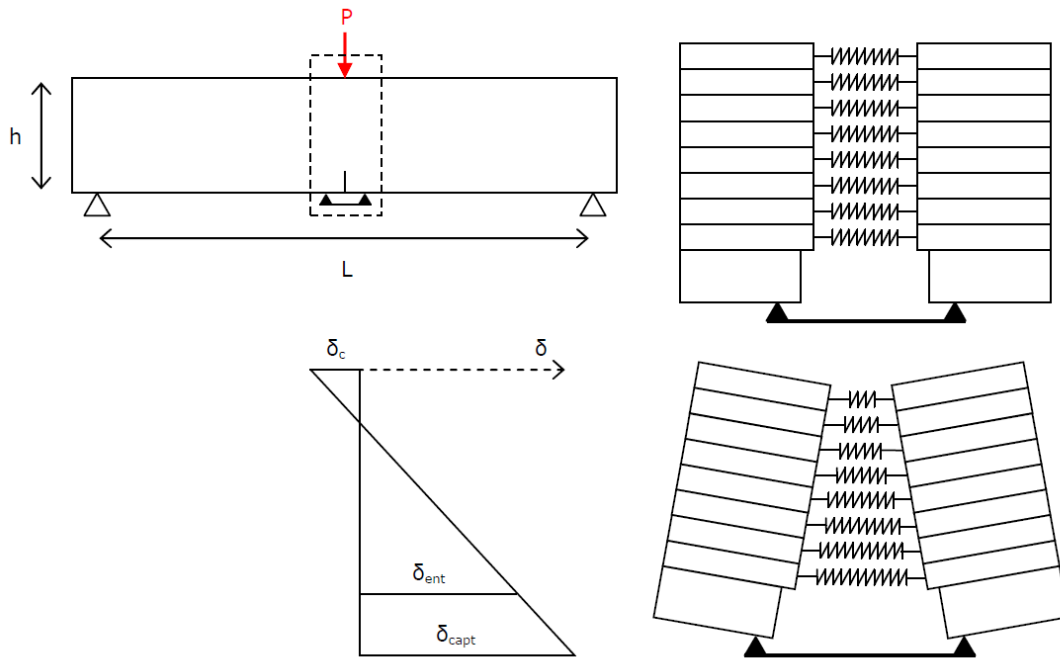


Figura 5.17: Procedimiento multicapas empleado en el Análisis Inverso.

- Se determina el desplazamiento (o deformación) de cada muelle como promedio de los desplazamientos en la correspondiente capa. Empleando la relación tensión-deformación de los modelos constitutivos, se determina la tensión en cada muelle. Luego se calculan la fuerza axial  $N_i$  y el momento flector  $M_i$  generados por cada capa. La suma de las contribuciones de las fuerzas  $N_i$  y momentos internos  $M_i$  relativos a cada capa tiene que igualar a la fuerza  $N$  y el momento  $M$  exteriores ( ver figura 5.18). En el caso de ensayo a flexo-tracción  $N$  es nulo.

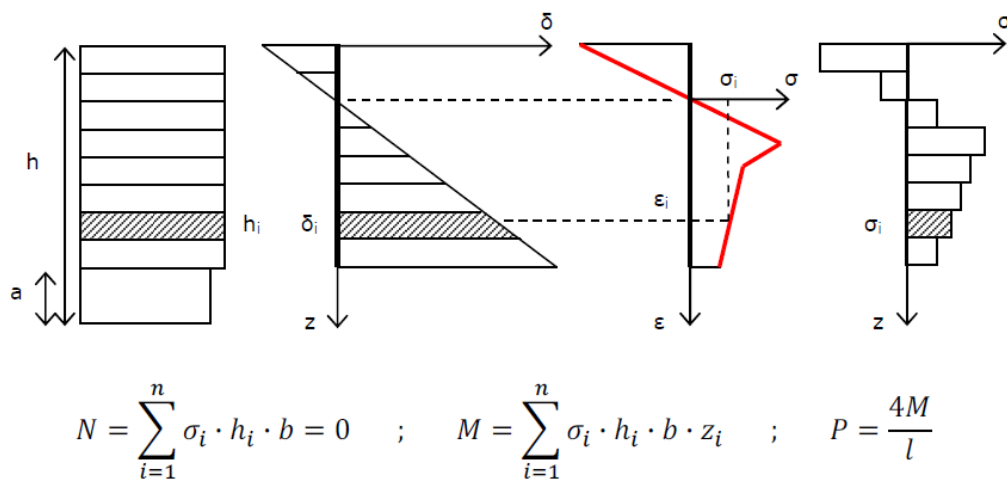


Figura 5.18: Equilibrio de esfuerzos en el procedimiento multicapas empleado en el Análisis Inverso.

- Se aplica un proceso incremental. Con pequeños escalones, el desplazamiento en el captador  $\Delta\delta_{capt}$  va aumentando. En cada paso, es necesaria una iteración para determinar la curvatura  $c$  que permite establecer el equilibrio de fuerzas en la sección transversal. Por

este motivo, se ajusta el desplazamiento en la parte superior de la probeta  $\delta_c$ , hasta que  $N$  es igual a cero. En este estado de equilibrio, se dibuja en un diagrama el punto correspondiente a la abertura de fisura en el captador  $\delta_{capt}$  y a la carga de flexo-tracción  $P$  correspondiente al momento de flexo-tracción  $M$ . El proceso se repite para cada paso incremental (ver figura 5.19). Se obtiene un diagrama teórico de carga-desplazamiento.

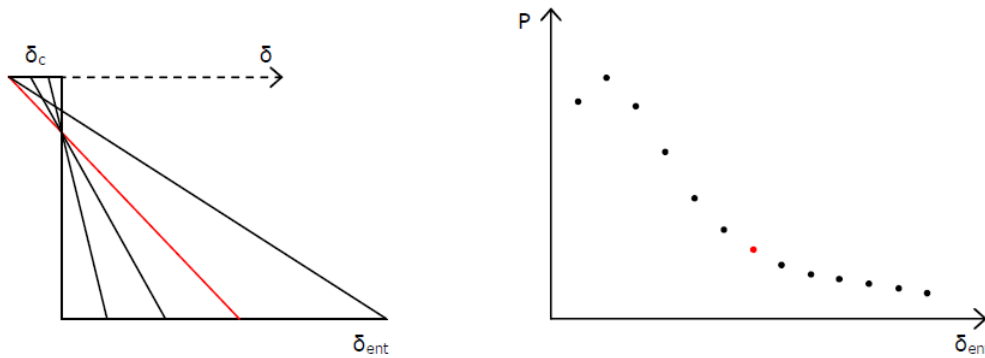
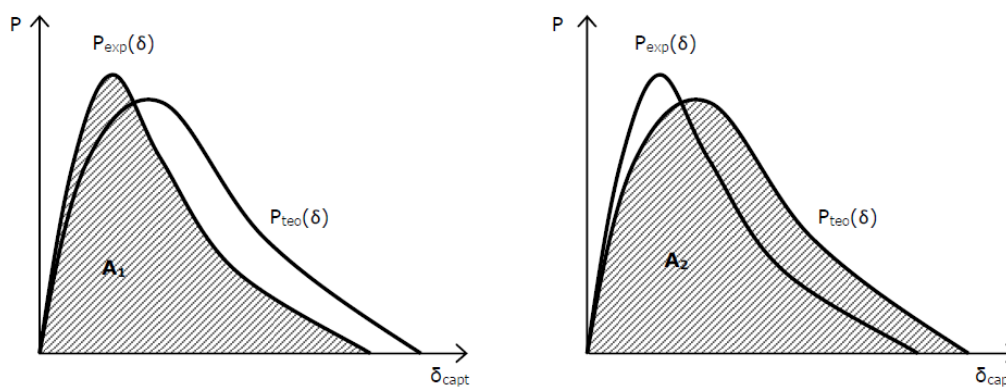


Figura 5.19: Diagrama carga-desplazamiento teórico obtenido con el Análisis Inverso.

En el tercer paso se chequea la precisión de la curva teórica carga-desplazamiento y se calcula la desviación entre los resultados experimentales y numéricos. Dependiendo de la desviación y del error admisible asumido, se repite el análisis empleando un diagrama constitutivo a tracción modificado (modificando los parámetros que lo definen y que hay que determinar) hasta que el error sea tan pequeño como la precisión requerida.

El área bajo la curva carga-desplazamiento ( $P-\delta$ ) obtenida numéricamente se compara con el área bajo la curva determinada experimentalmente. Los resultados obtenidos de la simulación se rechazan cuando la desviación máxima de la tenacidad  $\Delta D$  excede el 5% (ver figura 5.20).



$$A_1 < A_2 \rightarrow \Delta D = 1 - A_1/A_2$$

$$A_1 > A_2 \rightarrow \Delta D = 1 - A_2/A_1$$

$$\Delta D_{\max} \leq 0.05$$

Figura 5.20: Chequeo de precisión del Análisis Inverso.

El cálculo de la resistencia a tracción  $f_{ct}$  de los SFRC es un caso particular del proceso aplicado hasta aquí.

De la curva experimental de flexo-tracción del material, se obtiene la carga  $P_f$  para la que tiene lugar la fisuración. En la sección con entalla de centro luz las solicitaciones son:

$$N_f = 0 \quad (5.67)$$

$$M_f = \frac{P_f \cdot L}{4} \quad (5.68)$$

En el primer paso del Análisis Inverso se definen el diagrama de compresión y el comportamiento elástico a tracción hasta la fisuración (ver figura 5.21).

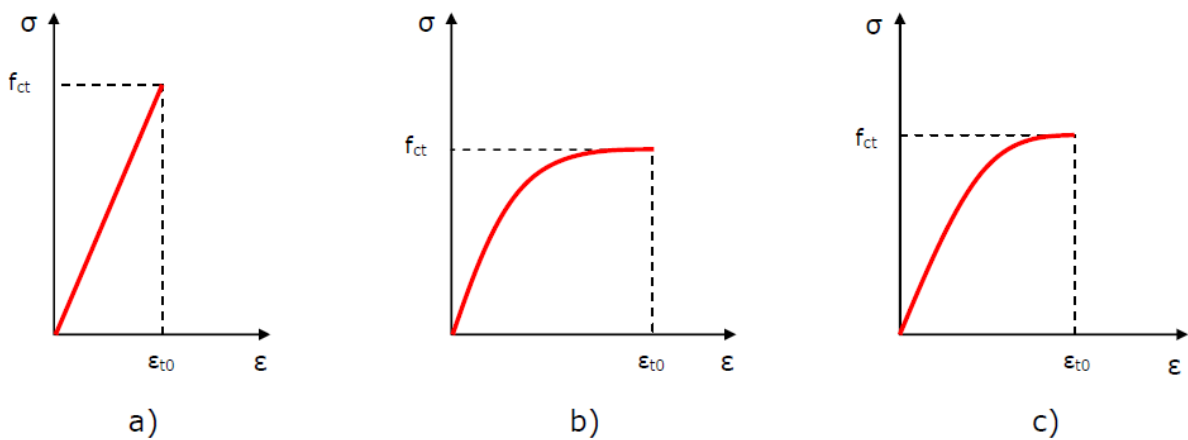


Figura 5.21: Diagramas elásticos hasta la fisuración: a) elástico lineal, b) elástico no lineal tipo Sargin, c) elástico no lineal parabólico.

Se puede expresar la deformación de fisuración  $\varepsilon_{t0}$  en función de la resistencia a tracción  $f_{ct}$ :

$$\varepsilon_{t0} = f(f_{ct}) \quad (5.69)$$

En la figura 5.22 se aprecia el estado tensional y deformacional de la sección de la entalla en el momento de la fisuración (en la figura 22 se asume la hipótesis de comportamiento elástico no lineal tipo Sargin).

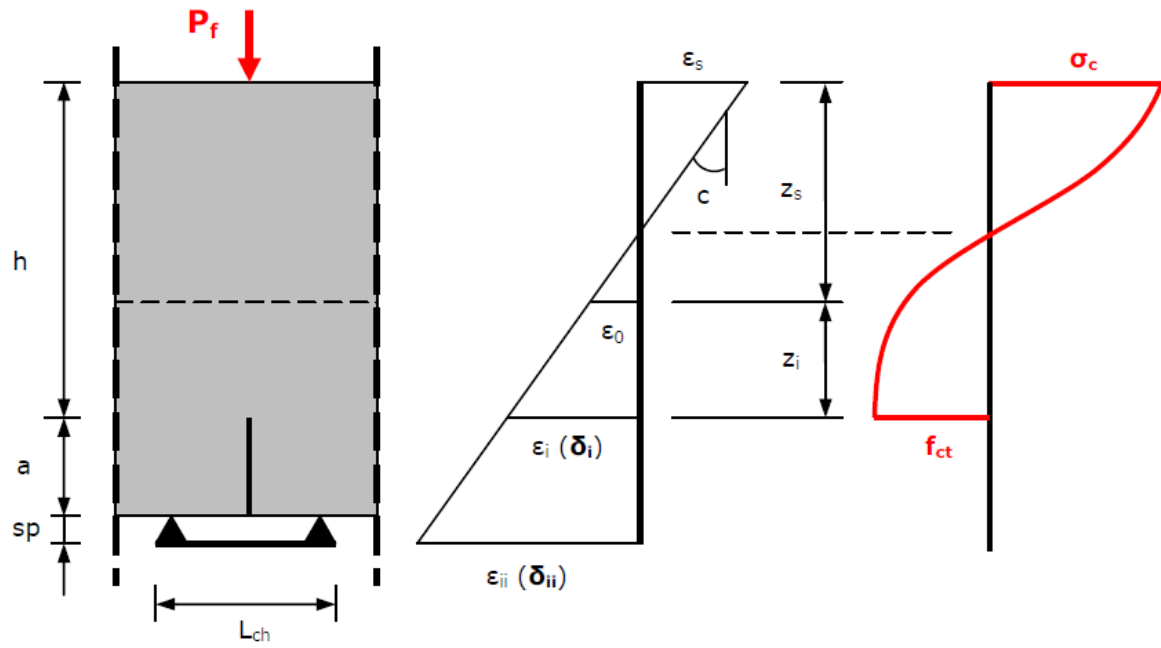


Figura 5.22: Estado de deformación y tensión en el instante de fisuración de la sección con entalla en situada en centro luz.

En el segundo paso, se ajusta el valor de  $f_{ct}$ , hasta obtener el estado que equilibra las fuerzas exteriores, de acuerdo con el bucle representado en la figura 5.23.

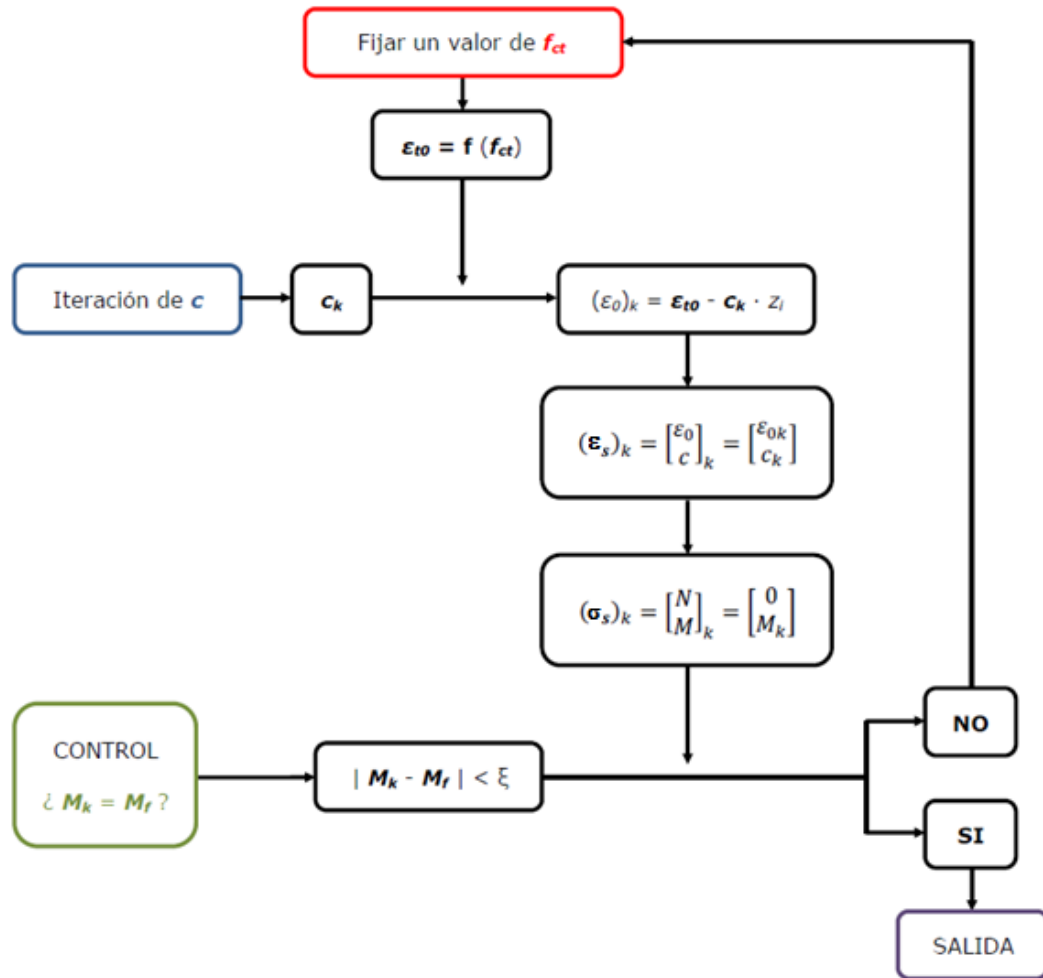


Figura 5.23: Bucle que esquematiza el funcionamiento del programa durante el Análisis Inverso para hallar el valor de la resistencia a tracción, según el modelo elástico asumido

Como se comprueba en el bucle, el tercer paso del Análisis Inverso es la comprobación de la precisión del resultado (tensión calculada  $f_{ct}$ ), mediante el control del error admitido  $M$ .

### 5.3. Elementos finitos

Se realiza la calibración del panel PB21 [94] (ver anejo D), la modelización de la viga de Bresler-Scordelis [11] (ver anejo E) y del *push-off* (ver capítulo 6) con el uso del método de elementos finitos. Para la modelización del hormigón armado se utiliza el cuadrilátero tanto de nueve como de cuatro nodos (elementos finitos 2D o bidimensional) y para la modelización de las armaduras de forma discreta se usa el elemento barra (elemento finito 1D o unidimensional). A continuación se describen las características de cada uno de ellos.

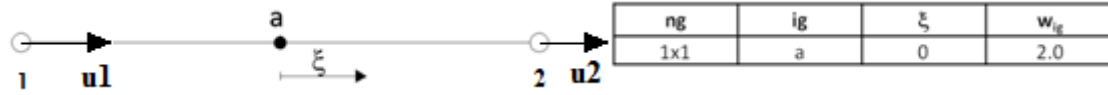
#### 5.3.1. Elemento barra

El elemento finito tipo barra se trata de un elemento unidimensional. Aquí se usa, concretamente, la barra de 2 nodos con 1 grado de libertad, es decir, un grado de libertad por nodo (desplazamiento axial  $u$ ). La matriz de rigidez  $K$  del elemento finito se obtiene usando el método de integración numérica de Gauss-Legendre. En el caso de la barra de 2 nodos se usa 1



punto de integración (ver tabla 5.3). Se elige este elemento tan simple porque sólo se pretende representar las armaduras discretas en su dirección axial. No se tiene en cuenta el posible mecanismo de flexión.

Tabla 5.3: Barra de 2 nodos expresado en el sistema de coordenadas isoparamétrico.



Funciones de forma (ver figura 5.24):

$$u(x) = N_e(x) \cdot r_e = [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

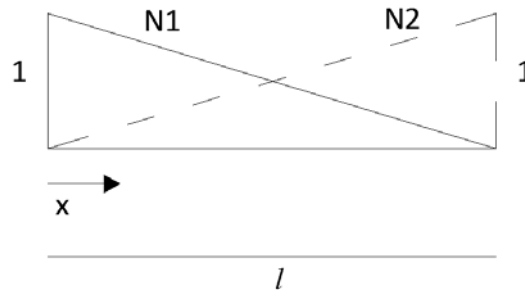


Figura 5.24: Construcción esquemática para la deducción de las funciones de forma para un elemento barra con 2 nodos y 1 grado de libertad por nodo.

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l}$$

$$N_2 = \frac{x}{l}$$

Deformaciones:

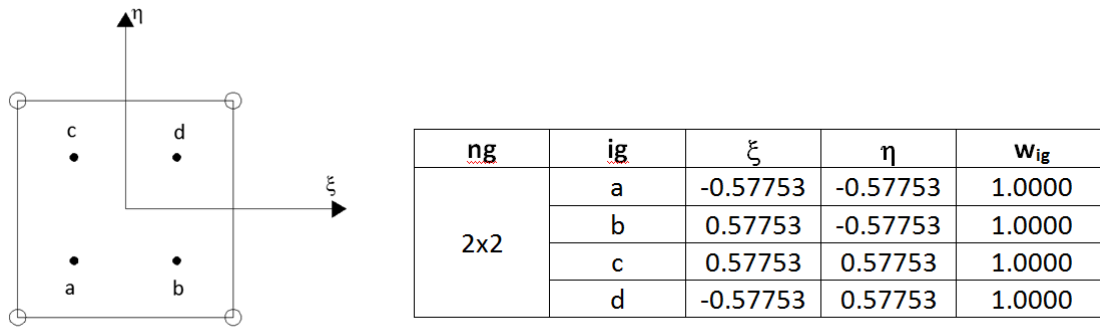
$$\varepsilon_x = B_e \cdot r_e$$

$$B_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

### 5.3.2. Cuadrilátero de 4 nodos

El elemento finito tipo cuadrilátero se trata de un elemento bidimensional. Aquí se usa, concretamente, el cuadrilátero de 4 nodos con 8 grados de libertad, es decir, 2 grados de libertad por nodo (desplazamiento  $u$  y desplazamiento  $v$ ). La matriz de rigidez  $K$  del elemento finito se obtiene usando el método de integración numérica de *Gauss-Legendre*. En el caso del cuadrilátero de 4 nodos se usan 4 puntos de integración (ver tabla 5.4).

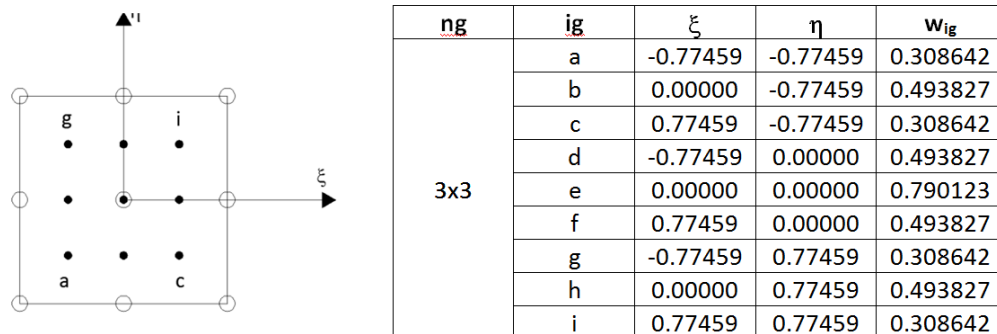
Tabla 5.4: Cuadrilátero de 4 nodos expresado en el sistema de coordenadas isoparamétrico.



### 5.3.3. Cuadrilátero de 9 nodos

El elemento finito tipo cuadrilátero, como ya se ha dicho, se trata de un elemento bidimensional. Aquí se usa, concretamente, el cuadrilátero de 9 nodos con 18 grados de libertad, es decir, 2 grados de libertad por nodo (desplazamiento  $u$  y desplazamiento  $v$ ). La matriz de rigidez  $K$  del elemento finito se obtiene usando el método de integración numérica de *Gauss-Legendre*. En el caso del cuadrilátero de 9 nodos se usan 9 puntos de integración (ver tabla 5.5).

Tabla 5.5: Cuadrilátero de 9 nodos expresado en el sistema de coordenadas isoparamétrico



### 5.3.4. Análisis comparativo entre el cuadrilátero de 4 nodos y el de 9 nodos

Aquí se lleva a cabo la comparación entre el uso del cuadrilátero de 4 nodos y el cuadrilátero de 9 nodos. De este modo se pueden conocer las ventajas e inconvenientes que se deben tener en cuenta a la hora de modelar con un tipo de cuadrilátero o con el otro.

Cuadrilátero de 4 nodos (ver figura 5.25):

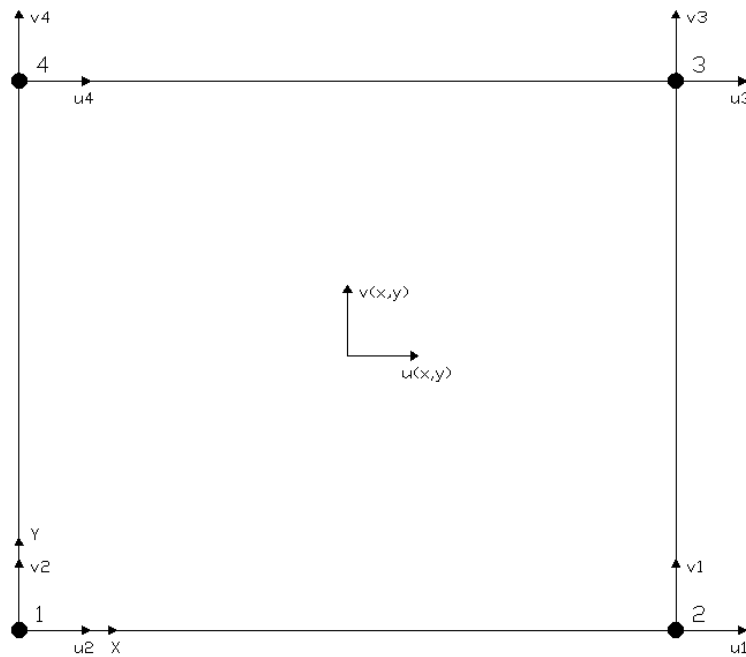
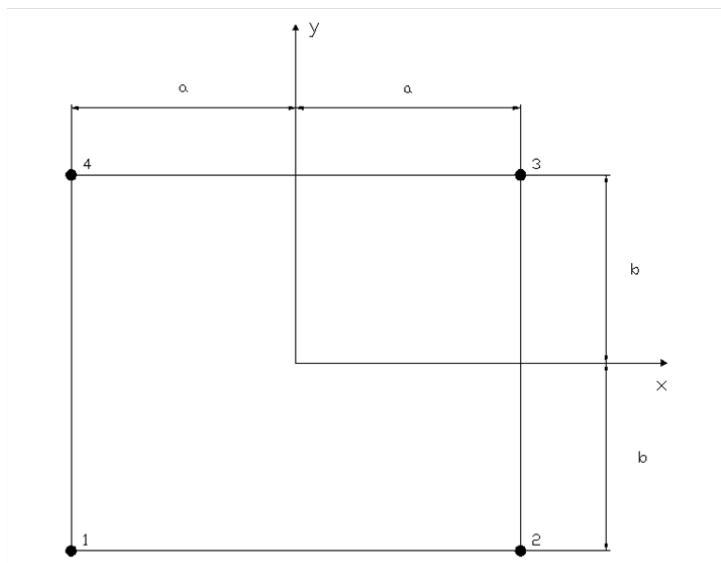


Figura 5.25: Campo de desplazamientos del elemento finito cuadrilátero de 4 nodos

Funciones de forma:



$$\mathbf{u}_e(x, y) = \mathbf{N}_e(x, y) \cdot \mathbf{r}_e$$

$$N_1 = \frac{1}{4 \cdot ab} \cdot (a - x) \cdot (b - y)$$

$$N_2 = \frac{1}{4 \cdot ab} \cdot (a + x) \cdot (b - y)$$

$$N_3 = \frac{1}{4 \cdot ab} \cdot (a + x) \cdot (b + y)$$

$$N_4 = \frac{1}{4 \cdot ab} \cdot (a - x) \cdot (b + y)$$

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Cuadrilátero de 4 nodos: DEFORMACIONES

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{r}_e$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\mathbf{B}_e = \frac{1}{4 \cdot ab} \begin{bmatrix} y-b & 0 & b-y & 0 & b+y & 0 & -y-b & 0 \\ 0 & x-a & 0 & -x-a & 0 & a+x & 0 & a-x \\ x-a & y-b & -x-a & b-y & a+x & b+y & a-x & -y-b \end{bmatrix}$$

-Las deformaciones en "x" serán las mismas para todos los puntos con la misma coordenada "y" dentro del E.F. ya que:

$$\varepsilon_{x,punto} = f(y_{punto}, u_{nodos}) \tag{5.70}$$

-Las deformaciones en "y" serán las mismas para todos los puntos con la misma coordenada "x" dentro del E.F. ya que:

$$\varepsilon_{y,punto} = f(x_{punto}, v_{nodos}) \tag{5.71}$$

-Las distorsiones angulares serán distintas en cada punto variando de forma lineal. Esto se puede observar manteniendo constante una coordenada y variando en una unidad la otra.

$$\gamma_{xy,punto} = f(x_{punto}, y_{punto}, u_{nodos}, v_{nodos}) \tag{5.72}$$

Por tanto, si se quiere observar una variación de las deformaciones en x y en y con este tipo de elemento será necesario mallar más la estructura. De este modo, al haber más cuadriláteros, hay más nodos en la estructura y, por consiguiente, se dispone de más desplazamientos nodales. Es decir, por ejemplo, los puntos con la misma coordenada y tendrán la misma deformación en x dentro del mismo E.F. pero no la misma que los que se encuentren en otro (ver figura 5.26).

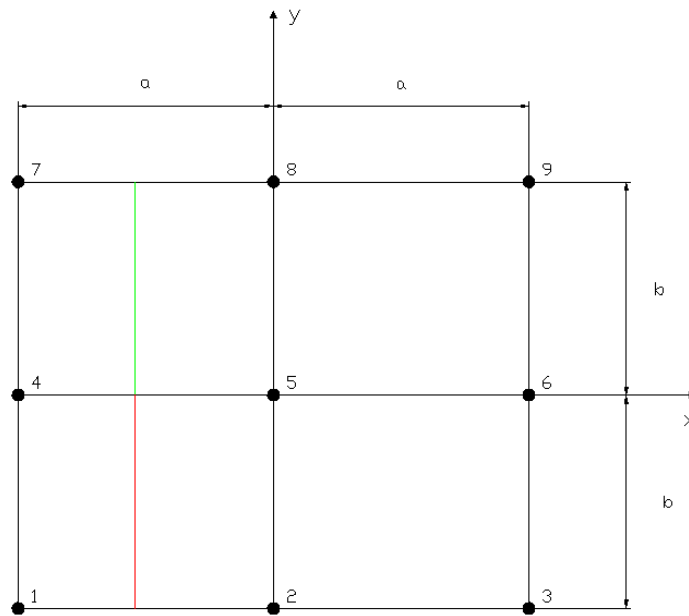


Figura 5.26: Variación de la  $\varepsilon_x$  para los puntos que tienen la misma coordenada y pero se encuentran en cuadriláteros distintos.

Cuadrilátero de 9 nodos (ver figura 5.27):

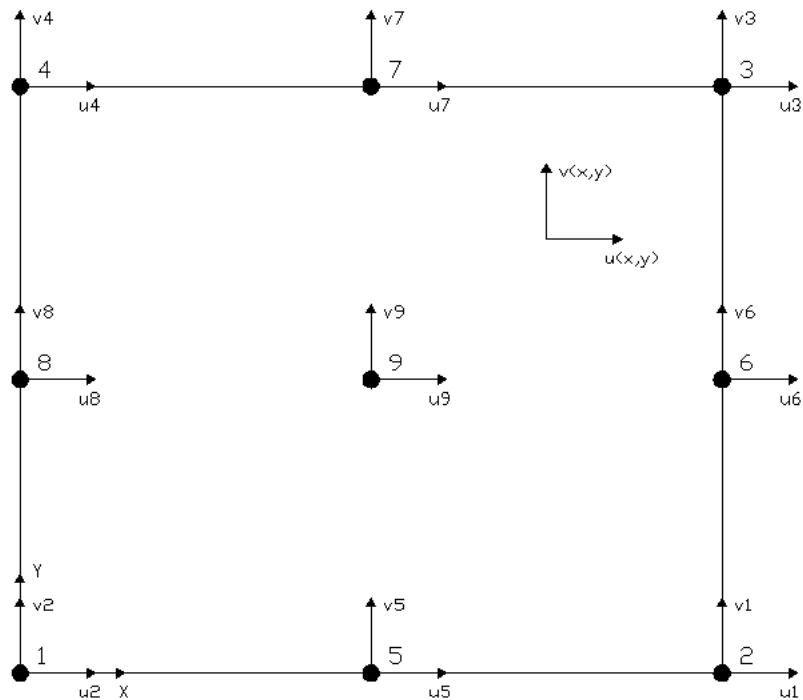
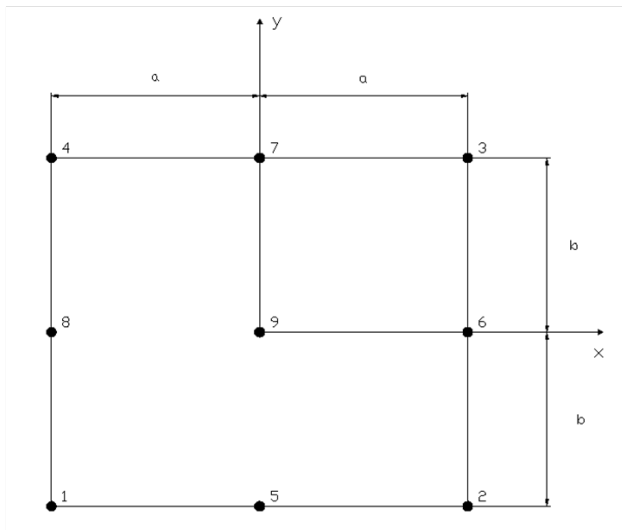


Figura 5.27: Campo de desplazamientos del elemento finito cuadrilátero de 9 nodos

Funciones de forma:



$$\mathbf{u}_e(x, y) = \mathbf{N}_e(x, y) \cdot \mathbf{r}_e$$

$$N_1 = \frac{x^2 \cdot y^2}{4a^2b^2} - \frac{x^2 \cdot y}{4a^2b} - \frac{x \cdot y^2}{4ab^2} + \frac{xy}{4ab}$$

$$N_2 = \frac{xy^2}{4ab^2} - \frac{x^2 \cdot y}{4a^2b} + \frac{x^2 \cdot y^2}{4a^2b^2} - \frac{xy}{4ab}$$

$$N_3 = \frac{xy^2}{4ab^2} + \frac{x^2 \cdot y}{4a^2b} + \frac{x^2 \cdot y^2}{4a^2b^2} + \frac{xy}{4ab}$$

$$N_4 = \frac{x^2 \cdot y}{4a^2b} - \frac{xy^2}{4ab^2} + \frac{x^2 \cdot y^2}{4a^2b^2} - \frac{xy}{4ab}$$

$$N_5 = \frac{y^2}{2b^2} - \frac{y}{2b} + \frac{x^2 \cdot y}{2a^2b} - \frac{x^2 \cdot y^2}{2a^2b^2}$$

$$N_6 = \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{2a^2} - \frac{xy^2}{2ab^2} - \frac{x^2 \cdot y^2}{2a^2b^2}$$

$$N_7 = \frac{y}{2b} + \frac{y^2}{2b^2} - \frac{x^2 \cdot y}{2a^2b} - \frac{x^2 \cdot y^2}{2a^2b^2}$$

$$N_8 = \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x}{2a} + \frac{xy^2}{2ab^2} - \frac{x^2 \cdot y^2}{2a^2b^2}$$

$$N_9 = \frac{x^2 \cdot y^2}{a^2 \cdot b^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + 1$$

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & N_9 \end{bmatrix}$$

Cuadrilátero de 9 nodos: DEFORMACIONES

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{r}_e$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_9}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_9}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} & \frac{\partial N_7}{\partial y} & \frac{\partial N_7}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & \frac{\partial N_9}{\partial y} & \frac{\partial N_9}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \\ u_9 \\ v_9 \end{bmatrix}$$

Componentes de la matriz  $B_e$  :

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{x \cdot y^2}{2 \cdot a^2 b^2} - \frac{x \cdot y}{2 \cdot a^2 b} - \frac{y^2}{4 \cdot a b^2} + \frac{y}{4 \cdot a b}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{y^2}{4 \cdot a b^2} - \frac{x \cdot y}{2 \cdot a^2 b} + \frac{x \cdot y^2}{2 \cdot a^2 b^2} - \frac{y}{4 \cdot a b}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{y^2}{4 \cdot a b^2} + \frac{x \cdot y}{2 \cdot a^2 b} + \frac{x \cdot y^2}{2 \cdot a^2 b^2} + \frac{y}{4 \cdot a b}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{x \cdot y}{2 \cdot a^2 b} - \frac{y^2}{4 \cdot a b^2} + \frac{x \cdot y^2}{2 \cdot a^2 b^2} - \frac{y}{4 \cdot a b}$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial x} = \frac{x \cdot y}{a^2 b} - \frac{x \cdot y^2}{a^2 b^2}$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial x} = \frac{1}{2 \cdot a} + \frac{x}{a^2} - \frac{y^2}{2 \cdot a b^2} - \frac{x \cdot y^2}{a^2 b^2}$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial x} = -\frac{x \cdot y}{a^2 b} - \frac{x \cdot y^2}{a^2 b^2}$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial x} = \frac{x}{a^2} - \frac{1}{2 \cdot a} + \frac{y^2}{2 \cdot a b^2} - \frac{x \cdot y^2}{a^2 b^2}$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial x} = \frac{2x \cdot y^2}{a^2 \cdot b^2} - \frac{2x}{a^2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{x^2 \cdot y}{2 \cdot a^2 b^2} - \frac{x^2}{4 \cdot a^2 b} - \frac{x \cdot y}{2 \cdot a b^2} + \frac{x}{4 \cdot a b}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{x \cdot y}{2 \cdot a b^2} - \frac{x^2}{4 \cdot a^2 b} + \frac{x^2 \cdot y}{2 \cdot a^2 b^2} - \frac{x}{4 \cdot a b}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{x \cdot y}{2 \cdot a b^2} + \frac{x^2}{4 \cdot a^2 b} + \frac{x^2 \cdot y}{2 \cdot a^2 b^2} + \frac{x}{4 \cdot a b}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial y} = \frac{x^2}{4 \cdot a^2 b} - \frac{x \cdot y}{2 \cdot a b^2} + \frac{x^2 \cdot y}{2 \cdot a^2 b^2} - \frac{x}{4 \cdot a b}$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial y} = \frac{y}{b^2} - \frac{1}{2 \cdot b} + \frac{x^2}{2 \cdot a^2 b} - \frac{x^2 \cdot y}{a^2 b^2}$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial y} = -\frac{x \cdot y}{a b^2} - \frac{x^2 \cdot y}{a^2 b^2}$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial y} = \frac{1}{2 \cdot b} + \frac{y}{b^2} - \frac{x^2}{2 \cdot a^2 b} - \frac{x^2 \cdot y}{a^2 b^2}$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial y} = \frac{x \cdot y}{a b^2} - \frac{x^2 \cdot y}{a^2 b^2}$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial y} = \frac{x^2 \cdot 2y}{a^2 \cdot b^2} - \frac{2y}{b^2}$$

-Las deformaciones en “x” serán lineales con respecto a la coordenada “x” del punto y parabólicas con respecto a la coordenada “y” del punto dentro del E.F:

$$\varepsilon_{x,punto} = f(x_{punto}, y_{punto}, y_{punto}^2, u_{nodos}) \quad (5.73)$$

-Las deformaciones en “y” serán lineales con respecto a la coordenada “y” del punto y parabólicas con respecto a la coordenada “x” del punto dentro del E.F:

$$\varepsilon_{y,punto} = f(x_{punto}, x_{punto}^2, y_{punto}, v_{nodos}) \quad (5.74)$$

-Las distorsiones angulares serán parabólicas con respecto a la coordenada “x” del punto y con respecto a la coordenada “y” del punto dentro del E.F:

$$\gamma_{xy,punto} = f(x_{punto}, x_{punto}^2, y_{punto}, y_{punto}^2, u_{nodos}, v_{nodos}) \quad (5.75)$$





## Capítulo 6:

# Implementación numérica y resultados numéricos.

En este capítulo se lleva a cabo el modelado del ensayo *push-off*. Se explica cómo se ha realizado la modelización del *push-off* usando los distintos materiales descritos en el capítulo 5: *DSFM*, *hor2dpan* y *MatJ2* para las probetas de hormigón armado usando el análisis directo, y el material *DSFM-Ser* para el hormigón armado y reforzado con fibras de acero usando Análisis Inverso para el comportamiento constitutivo de tracción. También se explica la discretización llevada a cabo de las piezas de hormigón armado con elementos finitos con el uso de elementos tipo cuadrilátero tanto de cuatro como de nueve nodos, la manera de modelar el armado pasando por distintos grados de discretización: desde armadura totalmente difusa (colocada dentro del material que caracteriza el hormigón como un parámetro de densidad de acero tanto en dirección  $x$  como en dirección  $y$ ) hasta armadura totalmente discreta mediante elementos finitos tipo barra.

Al final del capítulo se realiza un análisis y discusión de los resultados obtenidos tras el modelado tanto como material como con el uso de los elementos finitos del ensayo *push-off*. Tras la exposición de los resultados numéricos se analiza el grado de precisión obtenido en comparación con el observado experimentalmente y se valoran las virtudes y defectos de las modelizaciones realizadas.

### 6.1. Implementación numérica

Para llevar a cabo el proceso de modelización del ensayo *push-off* tanto como material como con el uso de elementos finitos se utiliza el FEDEASLab [98]. Se trata de un Toolbox de Matlab para el análisis estructural lineal y no lineal bajo solicitaciones estáticas y dinámicas. Es una herramienta que permite desarrollar e implementar con facilidad nuevos elementos, secciones y ecuaciones constitutivas. Sirve además para simular el comportamiento de pequeñas estructuras en el ámbito de la investigación y la docencia. Esta herramienta fue creada en el año 1998 por el Prof. Filip C. Filippou, Universidad de California, Berkeley, como ayuda para la docencia de los cursos de análisis estructural. En la actualidad, FEDEASLab es una robusta herramienta dentro del ámbito de investigación del análisis no lineal de estructuras.

#### 6.1.1. Material

Se realiza un modelado del *push-off* sólo teniendo en cuenta las características del material. Con ello se pretende obtener tensiones y deformaciones en la zona situada entre entallas. Esto se lleva a cabo mediante la implementación en Matlab del proceso en cuatro etapas distintas.

1. Se implementa en el Matlab las expresiones que definen el propio material descritas en el capítulo 5, en el apartado 5.1. Aquí se introducen las operaciones para la obtención de: las

componentes de deformaciones, la media de tensiones en el hormigón y en el acero, tensiones locales en las fisuras, deslizamiento de las caras de la fisura, módulos de deformación del hormigón y del acero, matrices de rigidez del hormigón y del acero, las deformaciones externas impuestas,... y se calculan sus valores.

2. Se reescriben los parámetros del material obtenidos del punto 1 según nombres de las variables que entiende el Toolbox FEDEASLab. Éstas se clasifican internamente en distintas acciones que se van llamando según sea necesario.

3. Aquí se resuelve el material por el método de deformación impuesta. Se trata de un método de control de respuesta donde la ecuación de constricción es la deformación impuesta. Se puede resolver para un sólo paso de deformación impuesta o para varios pasos.

Estas tres etapas son las que componen el conjunto de las operaciones necesarias para el cálculo del material. A continuación viene la cuarta etapa:

4. Se introduce el valor de las características del hormigón para que se pueda realizar el cálculo en las tres etapas anteriores. Estas características son: resistencia a compresión del hormigón, resistencia a tracción del hormigón, diámetro de las barras de acero en dirección  $x$  y en dirección  $y$ , límite elástico del acero en dirección  $x$  y en dirección  $y$ , módulo de deformación inicial del acero, deformación última del acero, recubrimientos y cuantías de armado en dirección  $x$  y en dirección  $y$ . También se implementa el valor y la dirección de la tensión exterior aplicada sobre el material, además del número de pasos en que se aplica y el valor máximo para la deformación generalizada impuesta, todo ello con el fin de poder aplicar el método de la deformación impuesta antes mencionado. Este paso es el que activa los tres pasos anteriores.

### 6.1.2. Análisis Inverso

La resolución del Análisis Inverso se lleva a cabo a través del programa Matlab y el toolbox FEDEASLab. Para ello, se implementan los tres pasos descritos en el apartado 5.2.2. del capítulo 5:

1. Definición de los datos iniciales del ensayo a flexotracción: geometría de la probeta, datos del material empleado en el ensayo (resistencia a compresión del hormigón, módulo de deformación a tracción tangente inicial, resistencia media a tracción del hormigón, ...), resultados del ensayo de flexotracción ( $P$ ,  $w$ ), se introduce la curva teórica y se inicializan los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\varepsilon_{ct0}$  de los que depende y se introducen los datos geométricos de la sección de la entalla.

2. Se simula numéricamente el proceso de rotura dentro del propio algoritmo. Ello se lleva a cabo ajustando el valor de  $f_{ct}$ , hasta obtener el estado que equilibra las fuerzas exteriores, de acuerdo con el bucle representado en la figura 5.23 del apartado 5.2.2. del capítulo 5.

3. Se realiza la comprobación de la precisión del resultado (tensión calculada  $f_{ct}$ ), mediante el control del error admitido  $M$ . Con ello se obtienen los valores de  $f_{ct}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\varepsilon_{ct0}$  que ajustan, dentro de un error controlado con la curva de tracción experimental.

Una vez se realiza el análisis inverso y se obtienen los parámetros de la curva de tracción, se realiza el ensamblaje del material tal y como se describe en el apartado 6.1.1 de este mismo capítulo, teniendo en cuenta que en este caso la ecuación constitutiva del material se compone de la parte de compresión definida por el material DSFM y la parte de tracción definida por el comportamiento Serna-Fuster con los parámetros obtenidos del análisis inverso.

### 6.1.3. Elementos finitos

Aquí se explica el programa FEDEASLab cuando se usa para la modelización mediante elementos finitos de estructuras como pueden ser: el panel (ver anejo D), vigas (ver anejo E) y el ensayo *push-off* (en el punto 6.2.2).

El modelo propuesto se implementa a nivel estructura. En el análisis se emplea el potencial de la aplicación FEDEASLab, ya que se pueden utilizar las funciones a nivel estructura de la misma. En este sentido, se aprovechan los algoritmos de resolución numérica presentes en esta aplicación.

El modo de cargar la estructura es por desplazamiento impuesto. Es decir, se le impone un desplazamiento y se intenta converger a él con varios escalones de carga. Se trata de un sistema de establecimiento de la carga por desplazamiento impuesto en pasos múltiples. Se controla el número de escalones de carga, el incremento de desplazamiento en cada escalón, el número máximo de iteraciones a realizar para llegar a la convergencia y la magnitud del error o residuo que se acepta para que el programa pase a la siguiente iteración. Aquí se obtiene el residuo según la norma energética. Es decir, se controla el incremento de trabajo a partir de un valor inicial (ver figura 6.1).

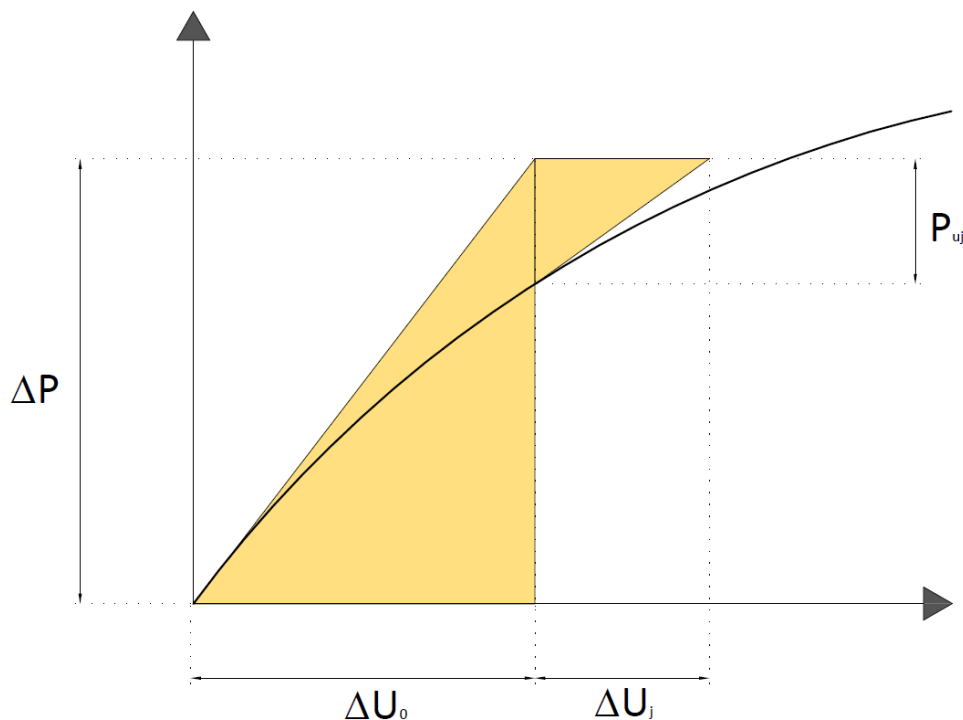


Figura 6.1: Norma energética para el control del residuo.

El incremento de trabajo inicial es :  $\Delta W_0 = \Delta P^T \Delta U_0$

donde  $\Delta P$  es el incremento del vector de carga y  $\Delta U_0$  el correspondiente incremento del vector de desplazamiento.

El incremento de trabajo durante la iteración j es:  $\Delta W_j = P_{uj}^T \Delta U_j$

La convergencia se controla del siguiente modo:  $\Delta W_j \leq \eta \Delta W_0$

donde la tolerancia  $\eta$  suele ser del orden de  $10^{-16}$ .

Por tanto, el método que se utiliza para la resolución del sistema y para la obtención de las fuerzas nodales internas es un método de control de respuesta. En concreto, como ya se ha dicho, se trata del método de desplazamiento impuesto en el cual, la ecuación de constricción es el desplazamiento impuesto de un grado de libertad de un nodo prefijado. Para llevar a cabo este método, se utiliza la matriz de rigidez tangente. Si no se consigue llegar a la solución en el número de pasos establecido según el propio criterio o se dispara el residuo a más de un valor establecido según, también, el propio criterio, se utiliza la matriz de rigidez secante como subsidiario para intentar hacer converger la solución, asumiendo que este modo de proceder puede converger de forma más grosera y, por tanto, más inexacta.

Ambos casos se tratan de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales de control de respuesta. Éstos permiten conocer los desplazamientos nodales ( $r$ ) para una carga aplicada determinada ( $f$ ) que, en este caso, la carga se traduce como un desplazamiento impuesto (ver figura 6.2).

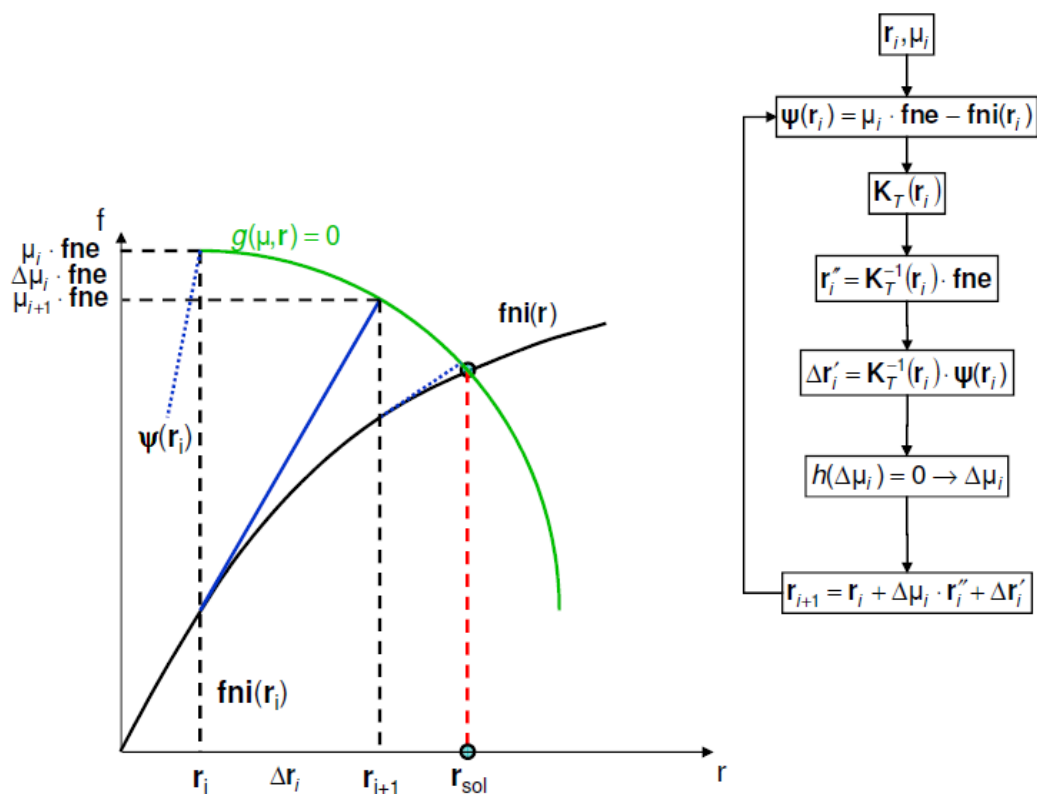


Figura 6.2: Proceso de cálculo de los métodos de control de respuesta [99].

El sistema de ecuaciones planteado por el Método de Elementos Finitos (MEF) aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales para  $n + 1$  ecuaciones es:

$$\mu \cdot \sum_e F_{Ge} = \sum_e T_e \cdot \int_{V_e} B_e^T \cdot \sigma_e \cdot dV \quad (6.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ ecuaciones:} \quad \psi(r) = \mu \cdot fne - fni(r) \quad (2) \\ \text{condición adicional:} \quad g(\mu, r) = 0 \quad (3) \\ \text{(ecuación de constricción)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n+1 \text{ incógnitas:} \\ (r, \mu) \end{array}$$

donde:

$\mu$  = factor de control del nivel de carga

$F_{Ge}$  = vector fuerzas nodales exteriores equivalentes.

$T$  = matriz de cambio de ejes.

$\sigma_e$  = vector de tensiones en los puntos de integración del elemento.

$B$  = matriz de deformación del elemento.

$K_T$  = matriz de rigidez tangente del elemento.

$\sum_e$  = ensamblaje.

$fni(r) = \sum_e T_e \cdot \int_{V_e} B_e^T \cdot \sigma_e \cdot dV \rightarrow$  fuerzas nodales internas equivalentes

$fne = \sum_e F_{Ge} \rightarrow$  fuerzas nodales exteriores equivalentes

Así pues, se define como fuerzas nodales residuales a la diferencia:

$$\psi(r) = \mu \cdot fne - fni(r) \quad (6.2)$$

$$\Delta\psi(r_i) = \Delta\mu_i \cdot fne - K_T(r_i) \cdot \Delta r_i \quad (6.4)$$

$$\Delta r_i = \Delta\mu_i \cdot K_T^{-1}(r_i) \cdot fne + K_T^{-1}(r_i) \cdot \psi(r_i) \quad (6.5)$$

$$\Delta r_i = \Delta\mu_i \cdot r_i'' + \Delta r_i' \quad (6.6)$$

De la ecuación de constricción se obtiene:

$$g(\mu, r) = 0 \quad (6.3)$$

$$g(\mu_i + \Delta\mu_i, r_i + \Delta r_i) = 0 \quad (6.7)$$

$$g(\mu_i + \Delta\mu_i, r_i + \Delta\mu_i \cdot r_i'' + \Delta r_i') = 0 \quad (6.8)$$

$$h(\Delta\mu_i) = 0 \quad (6.9)$$

Como se ha dicho, en el método del desplazamiento impuesto, la ecuación de constricción es el desplazamiento impuesto de un grado de libertad de un nodo prefijado (ver figura 6.3). De este modo:

$$h(\Delta\mu_i) \equiv r(k)_i - r(k)_m + \Delta r'(k)_i + r''(k)_i \cdot \Delta\mu_i - l_m = 0 \quad (6.10)$$

Despejando:

$$\Delta\mu_i = \frac{l_m - (r(k)_i - r(k)_m + \Delta r'(k)_i)}{r''(k)_i} \quad (6.11)$$

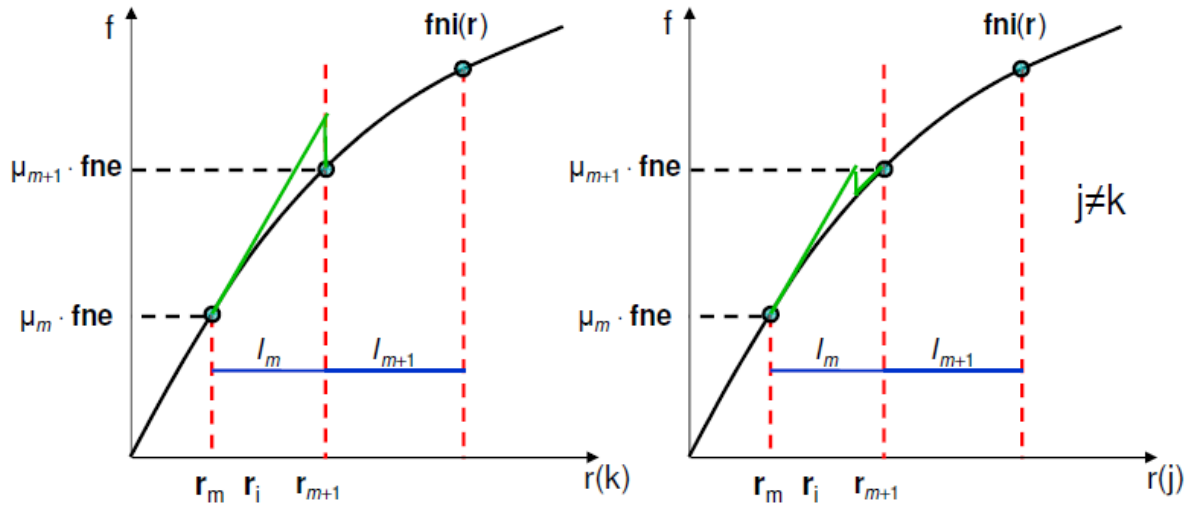


Figura 6.3: Gráfica carga aplicada-desplazamiento para: (izquierda) el grado de libertad  $k$  impuesto y (derecha) el resto de grados de libertad  $j$  [99].

En la figura 6.4 se muestra el diagrama de flujo que se sigue para la determinación del estado de un elemento.

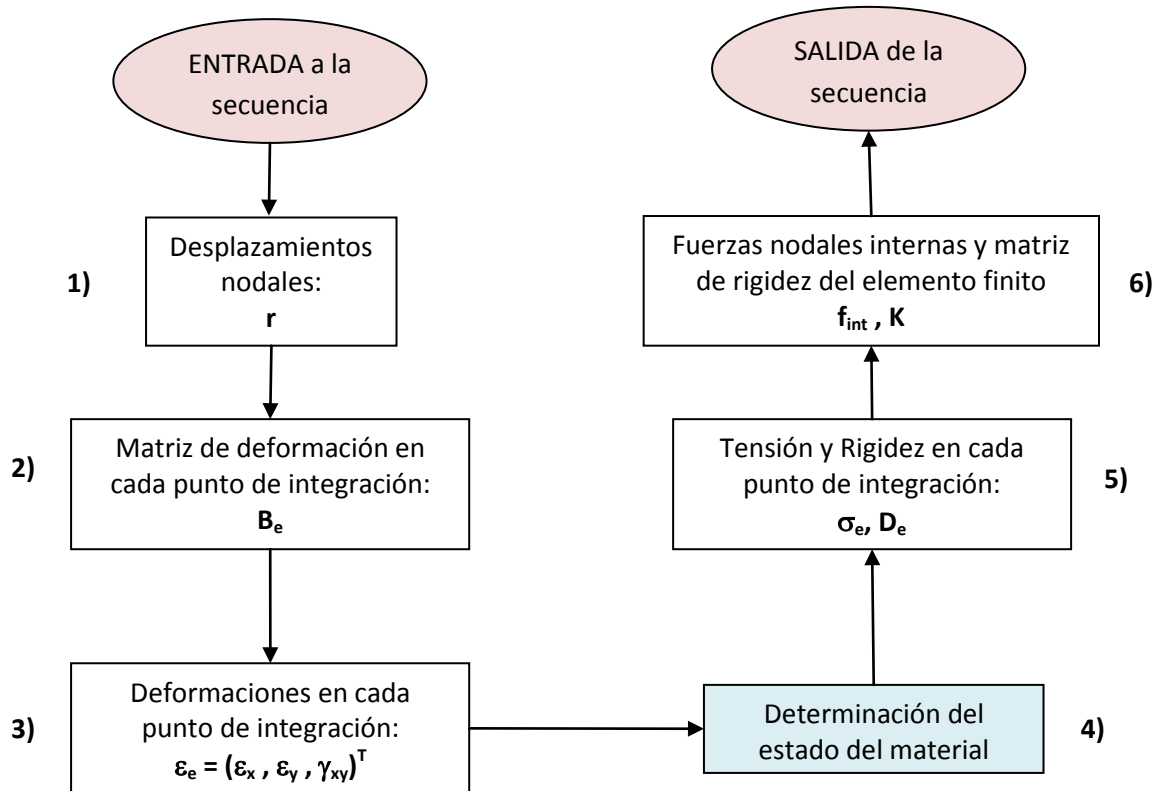


Figura 6.4: Determinación del estado de un elemento.

Se parte de una estructura equilibrada a un determinado nivel de carga. Con el fin de conseguir el equilibrio en el siguiente escalón de carga, se requiere evaluar de forma iterativa el estado de la estructura para unos determinados desplazamientos nodales. Para cada iteración se obtienen las correspondientes fuerzas nodales internas y la matriz de rigidez de cada elemento. En cada iteración se siguen los siguientes pasos:

**Paso 1:** Obtención de los desplazamientos nodales para cada elemento:  $r$

**Paso 2:** Se evalúa para cada uno de los puntos de integración  $(\xi, \eta)$  la correspondiente matriz de deformación:  $B_e(\xi, \eta)$ .

**Paso 3:** Se calculan las deformaciones para cada punto de integración:  $e_e = B_e \cdot r$

**Paso 4:** Se define el material tal y como se hace en el punto 6.1.1. de este mismo capítulo.

**Paso 5:** Conocida la deformación para cada uno de los puntos de integración, se aplican las ecuaciones constitutivas. Se obtiene el vector de tensiones y la matriz de rigidez de cada punto de integración:  $\sigma_e, D_e$

**Paso 6:** Se aplican las ecuaciones de equilibrio a nivel elemento a través del principio de los trabajos virtuales. Esto permite obtener la matriz de rigidez del elemento  $K$  y el vector de fuerzas nodales internas  $f_{int}$ .

## 6.2. Modelado del ensayo *Push-off*. Resultados numéricos.

### 6.2.1 Modelado como material

En este punto se explica el modelado del material que compone cada una de las probetas tanto de hormigón armado como las de hormigón armado y reforzado con fibras de acero usando el material DSFM y el DSFM-Ser, respectivamente. Por tanto lo que se muestra en este apartado es la respuesta tanto en tensiones como en deformaciones de un punto material situado en el plano de corte de la pieza (en la zona entre entallas).

Como se describe en el capítulo 3 se disponen de 5 tipos de material de los cuales se extraen dos probetas por cada uno. Cada material se corresponde con una dosificación (ver tabla 6.1).

*Tabla 6.1: Tabla identificador-dosificación-resistencia a compresión*

Identificador	Dosificación	$f_c$ (MPa)
Z-HA-3FI8-NF	J1-1	32.5
Z-HA-2FI8-NF	J1-2	36.35
Z-HF-2FI8-NF	J2-1	29.82
Z-HF-3FI8-NF	J2-2	33.77
Z-HF-0FI8-NF	J3-1	30.98

Las probetas correspondientes al hormigón armado (HA) se modelan con el material DSFM y las probetas con hormigón armado y reforzado con fibras de acero o sólo reforzado con fibras de acero (HF) se modelan con el material DSFM-Ser (ver tabla 6.2).

*Tabla 6.2: Tabla identificador-modelo material*

Identificador	Modelo material
Z-HA-3FI8-NF	DSFM
Z-HA-2FI8-NF	DSFM
Z-HF-2FI8-NF	DSFM-Ser
Z-HF-3FI8-NF	DSFM-Ser
Z-HF-0FI8-NF	DSFM-Ser



Para la realización del modelo material se tienen en cuenta los siguientes parámetros del hormigón y del acero:

- Resistencia a compresión del hormigón descrita en tabla 1.
- Diámetro de las armaduras que atraviesan el plano de corte en dirección x: 12mm (barras)
- Diámetro de las armaduras que atraviesan el plano de corte en dirección y: 8mm (cercos de cortante)
- Resistencia elástica del acero:  $f_y = 554.086$  MPa
- Resistencia última del acero:  $f_u = 641.849$  MPa
- Módulo de elasticidad del acero:  $E_s = 178765$  MPa.

### 6.2.1.1 Probetas de hormigón armado (HA) con material DSFM

Como ya se ha comentado se modelan con material DSFM las probetas que se corresponden con el identificador: Z-HA-3FI8-NF y Z-HA-2FI8-NF.

Para la resistencia a tracción del hormigón, se añade a la expresión (5.25) del capítulo 5 (donde se define la resistencia a tracción del hormigón para el material DSFM) un coeficiente  $K$  que se va variando para ver el efecto que produce y calibrar hasta qué punto se puede adaptar las curvas obtenidas de forma teórica con el modelo con las obtenidas de forma práctica. Es decir:

$$f'_t = 0.65 \cdot (f'_c)^{0.33} \quad (5.25)$$

$$f'_t = K \cdot 0.65 \cdot (f'_c)^{0.33} \quad (6.12)$$

También se consideran dos cuantías de armado en dirección  $x$  ( $\rho_x$ ) dependiendo del ancho que se coja en la zona entre entallas (ver figura 6.5).

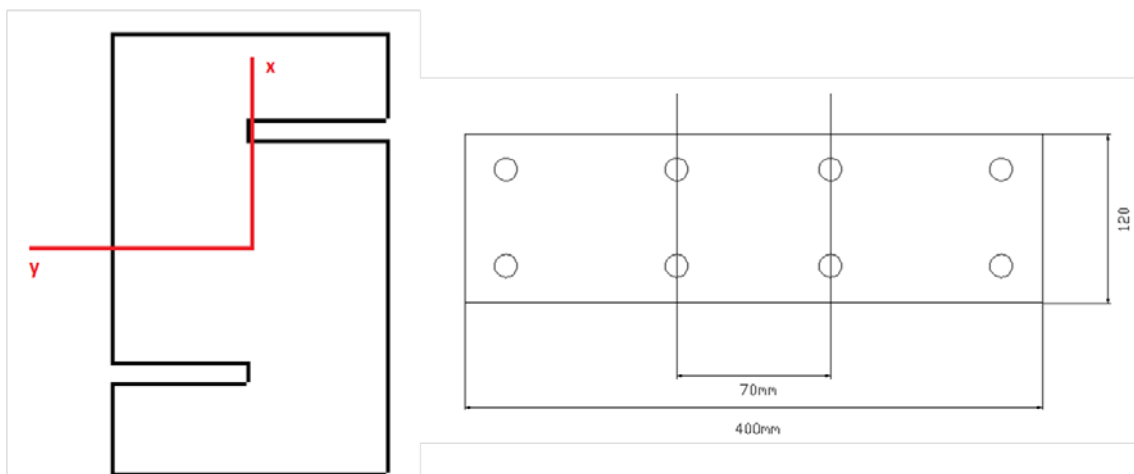


Figura 6.5: Sistema de referencia en el ensayo y sección de la probeta entre entallas perpendicular a la dirección  $x$ .

De este modo, se tiene:

$$\rho_{x1} = \frac{8 \cdot A_{\phi 12}}{400 \cdot 120} = 0.01885$$

$$\rho_{x2} = \frac{2 \cdot A_{\phi 12}}{70 \cdot 120} = 0.02693$$

Para las cuantías de armado en y, se consideran los dos casos posibles: 3F18 y 2F18 (ver figura 6.6).

$$\rho_{y \text{ 3F18}} = \frac{6 \cdot A_{\phi 8}}{265 \cdot 120} = 9.4841 \cdot 10^{-3}$$

$$\rho_{y \text{ 2F18}} = \frac{4 \cdot A_{\phi 8}}{265 \cdot 120} = 6.3227 \cdot 10^{-3}$$

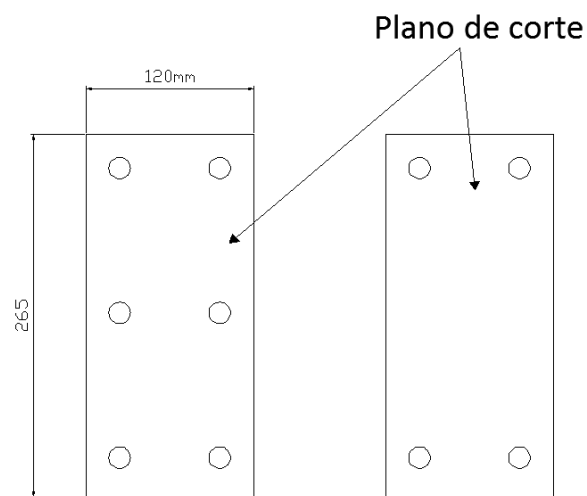


Figura 6.6: Sección de la probeta entre entallas perpendicular a la dirección y (plano de corte) para 3F18 y para 2F18.

Con todo lo dicho, se obtienen los siguientes resultados:

- Para Z-HA-3F18-NF:

Con el armado  $\rho_{x1}$  ver figuras 6.7 y 6.8:

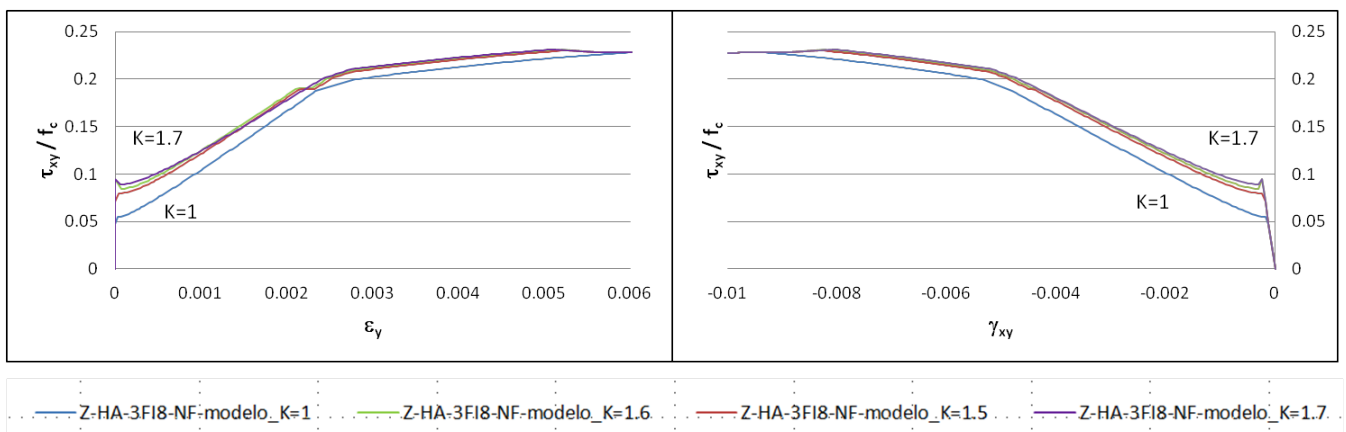


Figura 6.7: Z-HA-3F18-NF con cuantía de armado x1 comparado con distintas K.

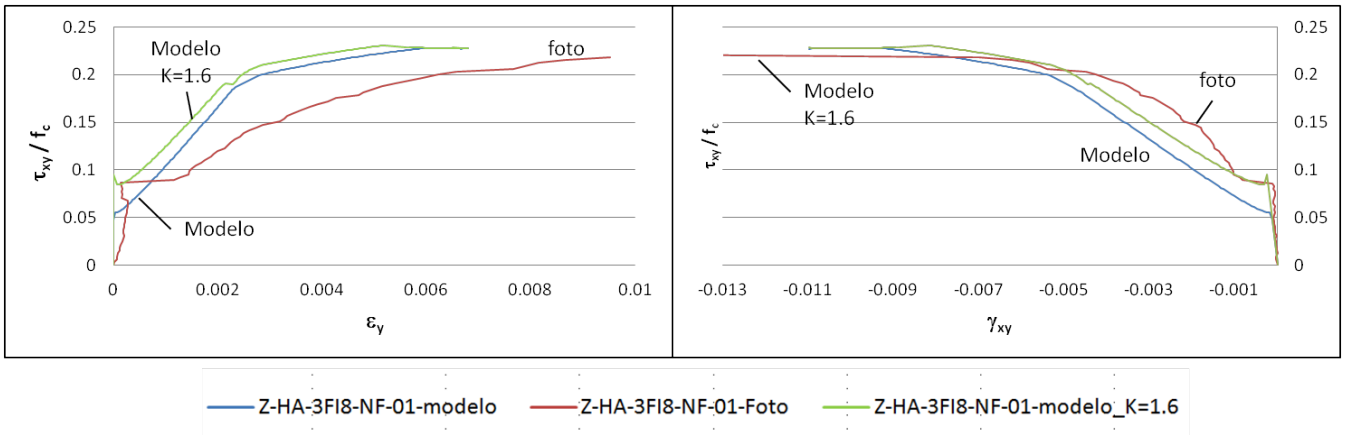


Figura 6.8: Z-HA-3FI8-NF con cuantía de armado  $x_1$  comparado con fotogrametría.

Con el armado  $\rho_{x2}$  ver figuras 6.9 y 6.10:

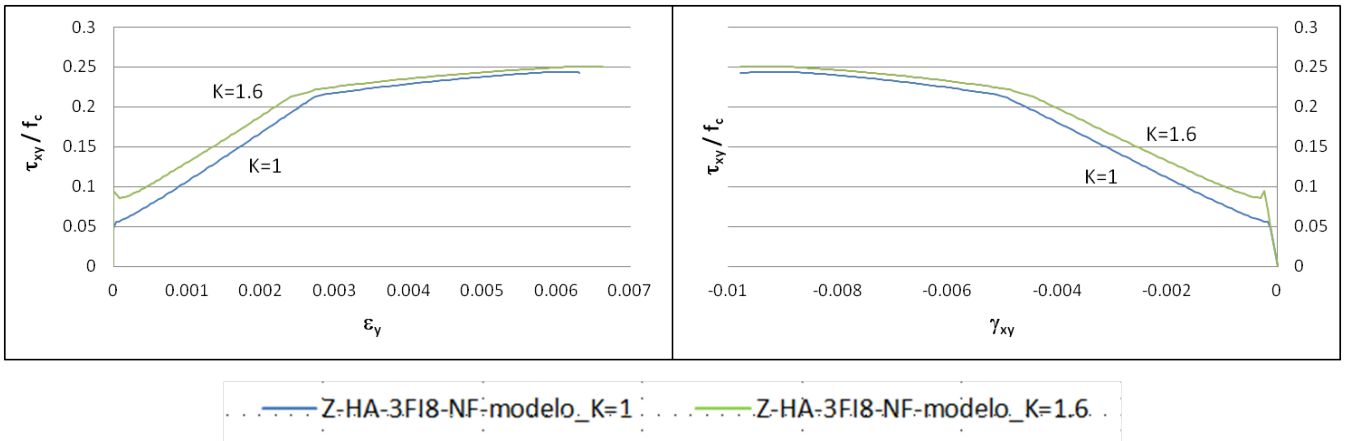


Figura 6.9: Z-HA-3FI8-NF con cuantía de armado  $x_2$  comparado con distintas  $K$ .

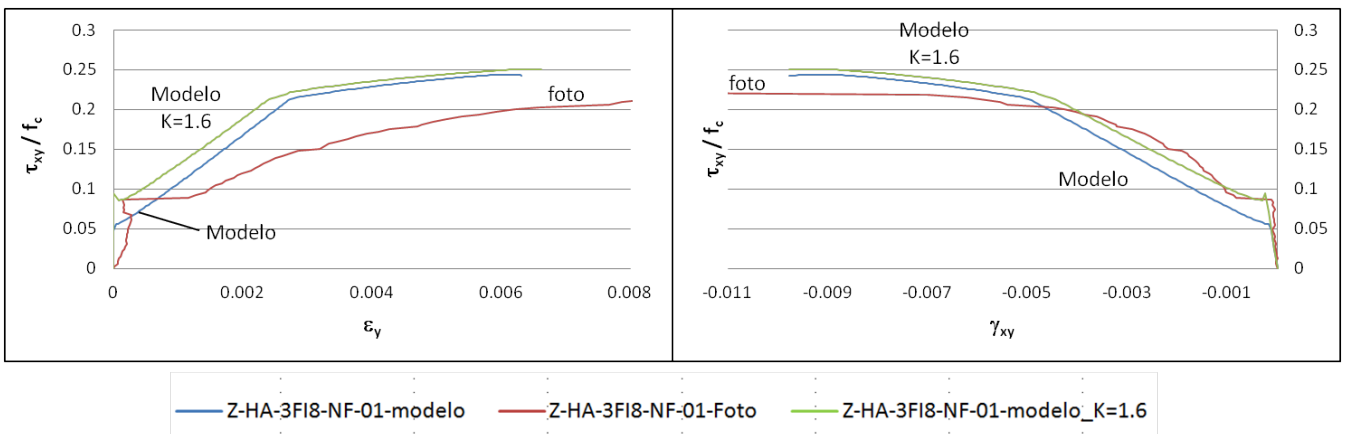


Figura 6.10: Z-HA-3FI8-NF con cuantía de armado  $x_2$  comparado con fotogrametría.

- Para Z-HA-2FI8-NF:

Con el armado  $\rho_{x1}$  ver figuras 6.11 y 6.12:

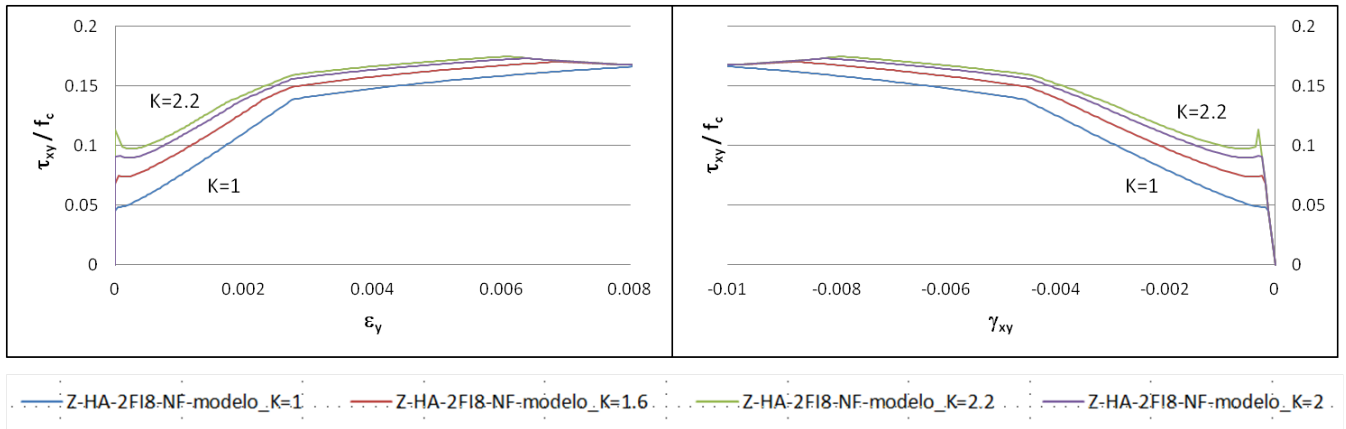


Figura 6.11: Z-HA-2FI8-NF con cuantía de armado  $x1$  comparado con distintas  $K$ .

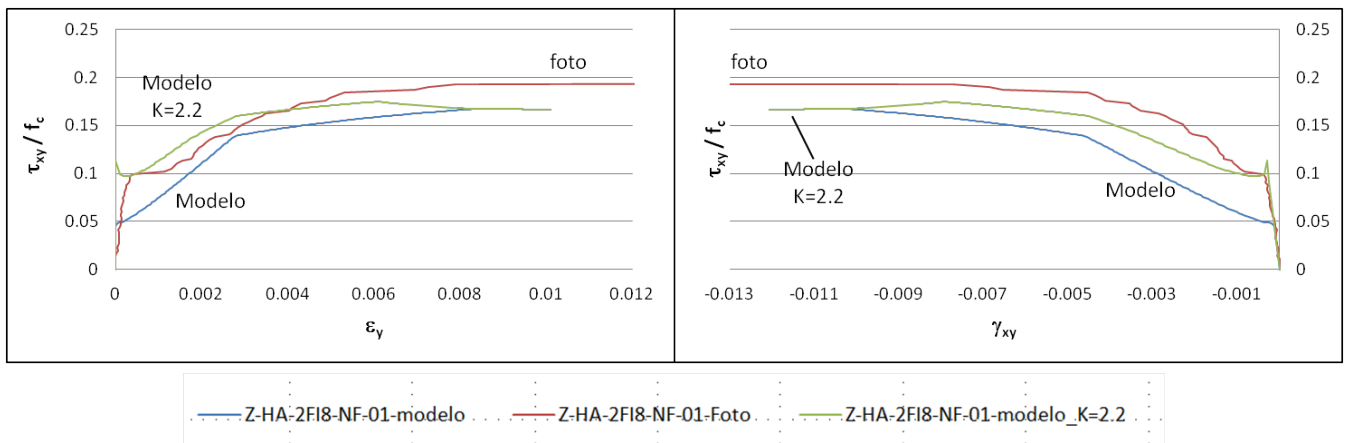


Figura 6.12: Z-HA-2FI8-NF con cuantía de armado  $x1$  comparado con fotogrametría.

Con el armado  $\rho_{x2}$  ver figuras 6.13 y 6.14:

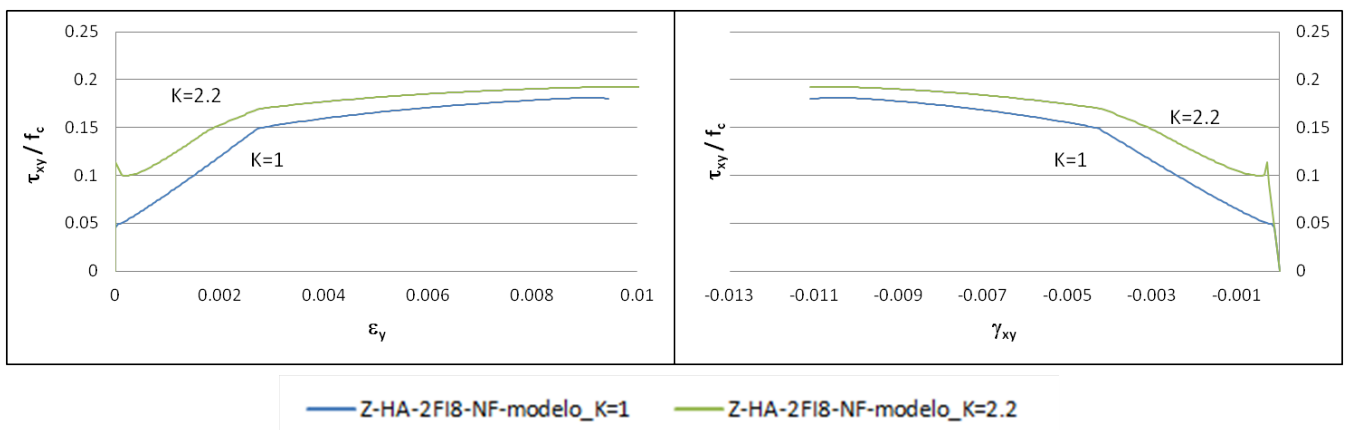


Figura 6.13: Z-HA-2FI8-NF con cuantía de armado  $x2$  comparado con distintas  $K$ .

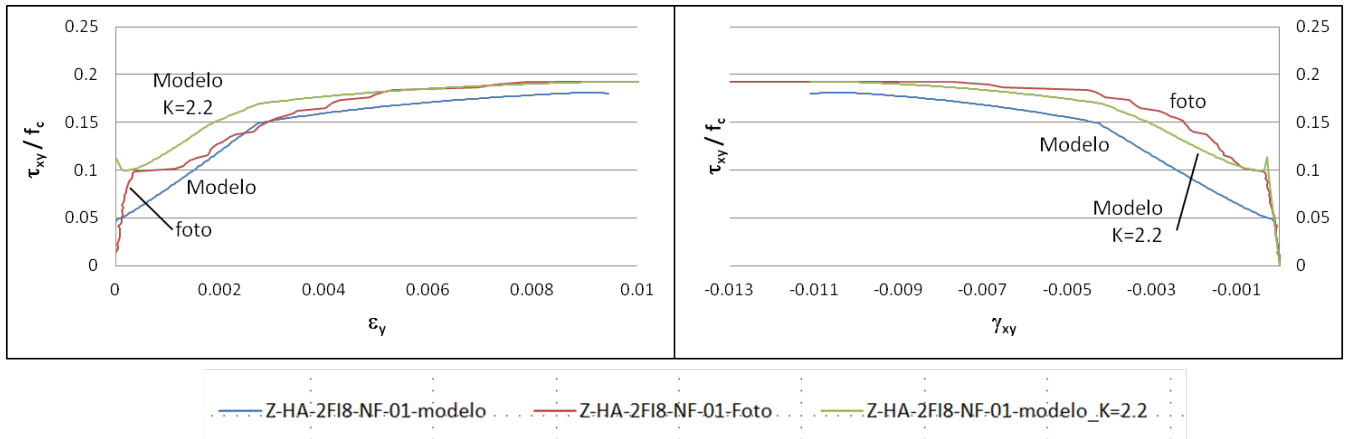


Figura 6.14: Z-HA-2FI8-NF con cuantía de armado x2 comparado con fotogrametría.

A la vista de los gráficos de las figuras 6.7 a 6.14 parece que se adapta mejor a la curva experimental el considerar el modelo numérico con la cuantía de armado x2 y valores de K superiores a 1.5, tanto para 3FI8 como para 2FI8. Al aumentar el valor de K se consigue alargar más la rama elástica y, por consiguiente, la fisuración diagonal se alcanza para valores de tensión más elevados. El hecho de usar el armado x2 no mejora demasiado el comportamiento elástico ni el comportamiento frente a la fisuración diagonal, pero sí que parece alcanzar cargas de rotura más elevadas y mantener más estable el tramo final de la gráfica, que es donde se produce la plastificación de la armadura. No obstante lo dicho, los retoques realizados con armado x2 y valores de K superiores a 1.5 son artificios numéricos que se han usado para calibrar la sensibilidad del modelo. Por tanto, es conveniente modelar con armado x1 y valores de K=1, ya que esto concuerda más con la realidad y, como se puede observar en las gráficas de las figuras 6.7 a 6.14, las diferencias son aceptables.

Además, también se añade el efecto de una compresión lateral en dirección x (ver figura 6.5). La definición de la compresión lateral se lleva a cabo en función de la relación entre las tensiones  $\sigma_x : \sigma_y : \tau_{xy}$ . En el caso de las figuras anteriores donde no se tiene en cuenta el efecto de la compresión lateral se utiliza una relación tensional: 0:0:1. Para la obtención de los resultados teniendo en cuenta el efecto de la compresión lateral se utiliza una relación tensional:  $-P/(b \cdot h) : 0 : P/(b \cdot H)$  o, lo que viene a ser lo mismo:  $-H/h : 0 : 1$ . Donde H es la altura del plano de corte: 265mm (ver figura 6.6) y h es el ancho de paso de las bielas de compresión que se ha asociado a la separación entre armaduras que cruzan el plano de corte en dirección x (ver figura 6.5). Si se utiliza un valor de  $h = 70\text{mm}$  sale un valor del ratio de compresión  $\sigma_x = -3.786$  que da lugar a un comportamiento demasiado rígido. Por tanto, los resultados de las figuras 6.15 y 6.16 se obtienen usando un valor de  $h = 400\text{mm}$  con un valor del ratio de compresión  $\sigma_x = -0.6625$ .

Para la obtención de estos resultados se utiliza  $K = 1$  y una cuantía de armado de x1. De este modo se obtiene:

- Para Z-HA-3FI8-NF (ver figura 6.15):

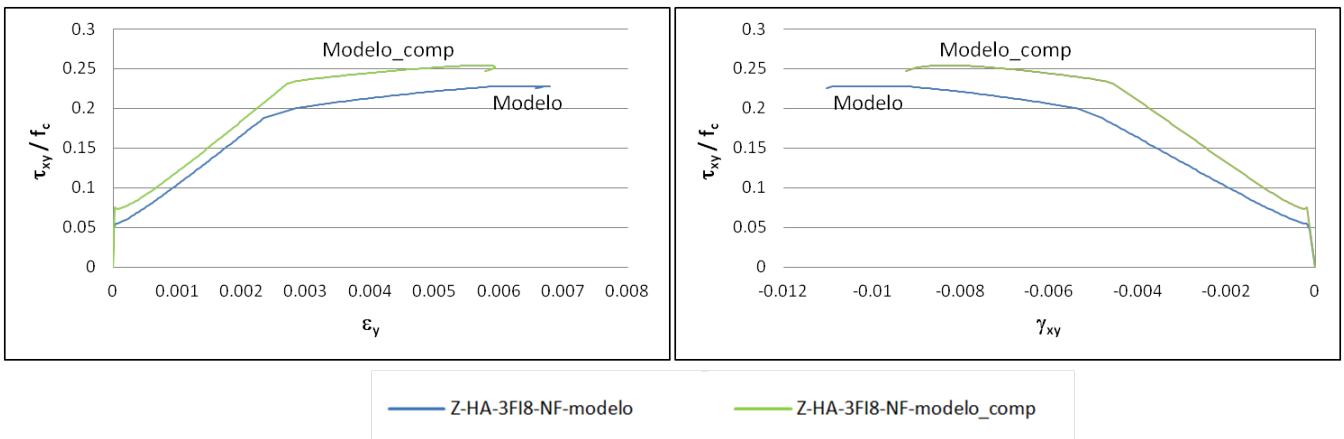


Figura 6.15: Z-HA-3FI8-NF con cuantía de armado x1 comparado con modelo con compresión lateral.

- Para Z-HA-2FI8-NF (ver figura 6.16):

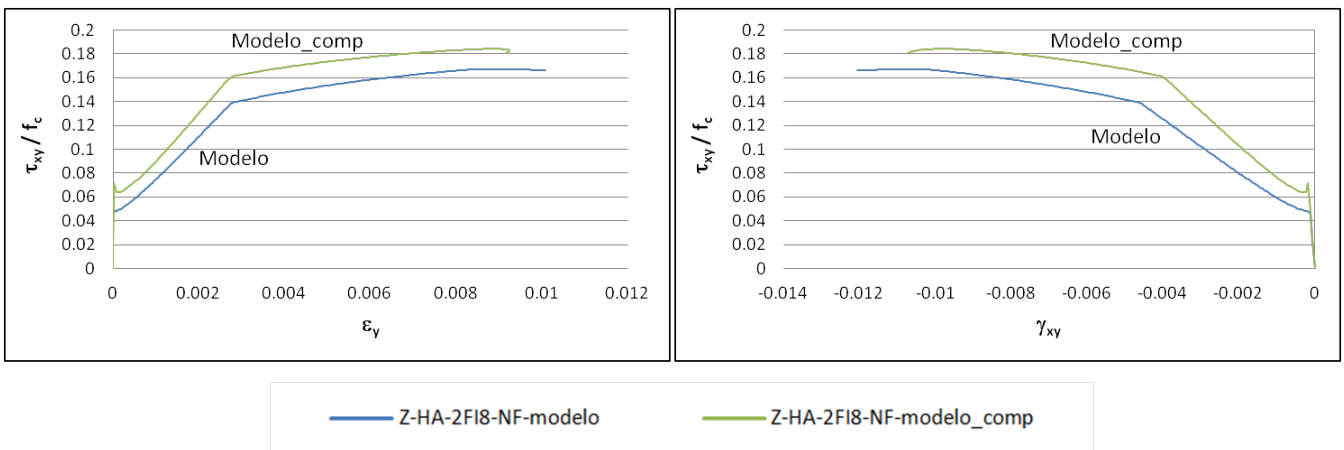


Figura 6.16: Z-HA-2FI8-NF con cuantía de armado x1 comparado con modelo con compresión lateral.

Al comparar las figuras 6.15 y 6.16 se observa que el efecto de la compresión consigue que la armadura plastifique a un nivel de carga más elevado y que se alcance una mayor carga de rotura. No obstante, la rigidez no parece verse afectada por este efecto.

### 6.2.1.2 Probetas de hormigón armado y reforzado con fibras de acero (HF) con material DSFM-Ser

Como ya se ha comentado se modelan con material DSFM-Ser las probetas que se corresponden con el identificador: Z-HF-3FI8-NF, Z-HF-2FI8-NF y Z-HF-0FI8-NF.

La cuantía de armado que se usa es:

- Armado en x:

$$\rho_x = \frac{8 \cdot A_{\phi 12}}{400 \cdot 120} = 0.01885$$

- Armado en y:

$$\rho_{y \ 3F18} = \frac{6 \cdot A_{\phi 8}}{265 \cdot 120} = 9.4841 \cdot 10^{-3}$$

$$\rho_{y \ 2F18} = \frac{4 \cdot A_{\phi 8}}{265 \cdot 120} = 6.3227 \cdot 10^{-3}$$

Tal y como se explica en el apartado 5.1.4 del capítulo 5, por Análisis Inverso se obtienen los valores de la tabla 6.3:

Tabla 6.3: Parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\epsilon_{ct0}$  y  $f_{ct}$  obtenidos para las distintas probetas

Probetas	$\alpha$	$\beta$	$\epsilon_{ct0}$	$f_{ct}$ (MPa)
Z-HF-3F18-NF	0.6013	$1.4880 \cdot 10^7$	0.0151	2.7989
Z-HF-2F18-NF	0.5791	$1.1608 \cdot 10^7$	0.0047	2.7033
Z-HF-0F18-NF	0.5834	$2.2752 \cdot 10^7$	0.0215	3.1067

También se lleva a cabo el análisis con una compresión lateral tal y como se ha explicado en el apartado anterior (apartado 6.2.1.1).

De este modo se obtienen los siguientes resultados:

- Para Z-HF-3F18-NF (ver figura 6.17):

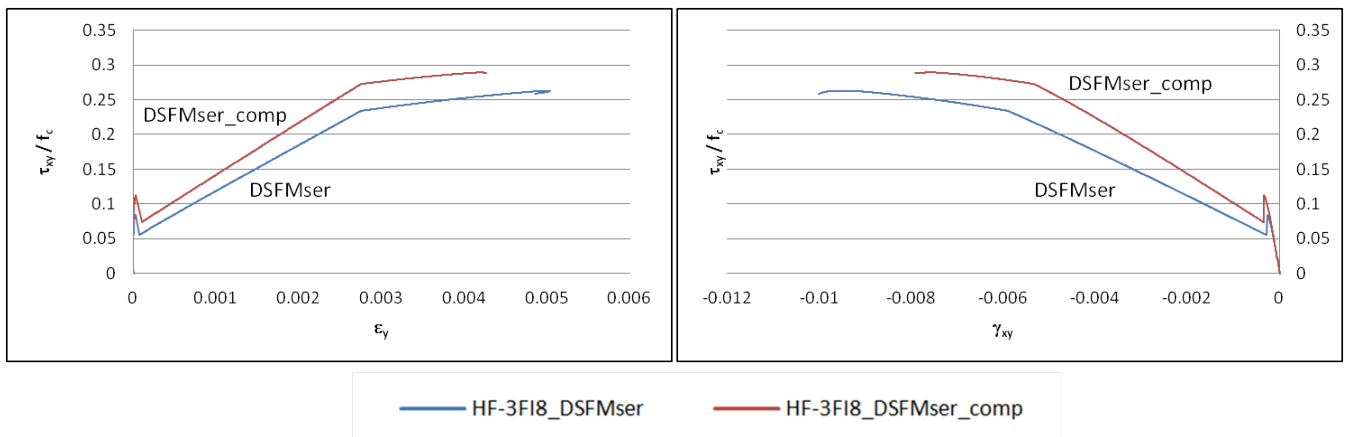


Figura 6.17: Z-HF-3F18-NF comparado con modelo con compresión lateral.

- Para Z-HF-2FI8-NF (ver figura 6.18):

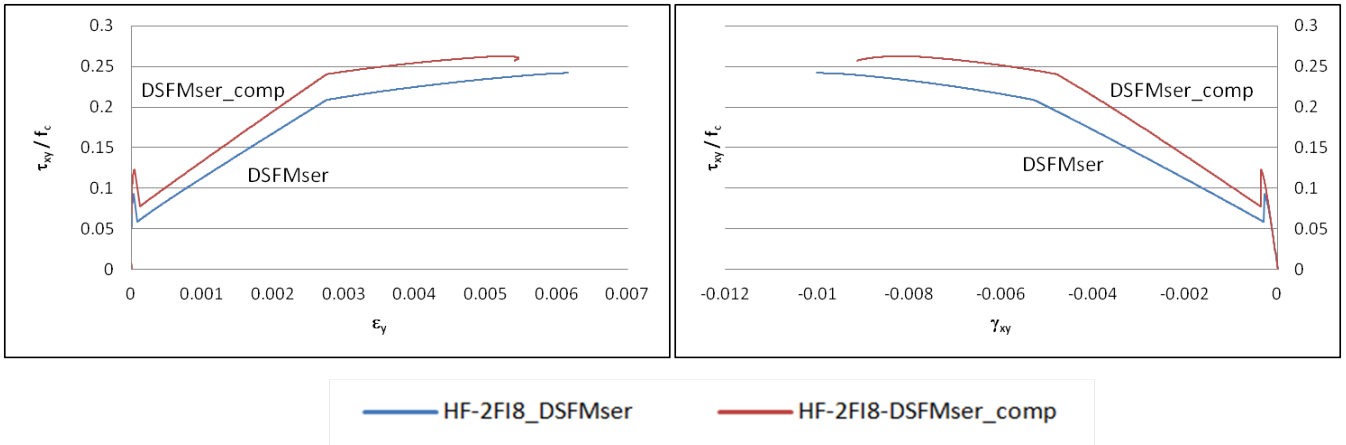


Figura 6.18: Z-HF-2FI8-NF comparado con modelo con compresión lateral.

- Para Z-HF-0FI8-NF (ver figura 6.19):

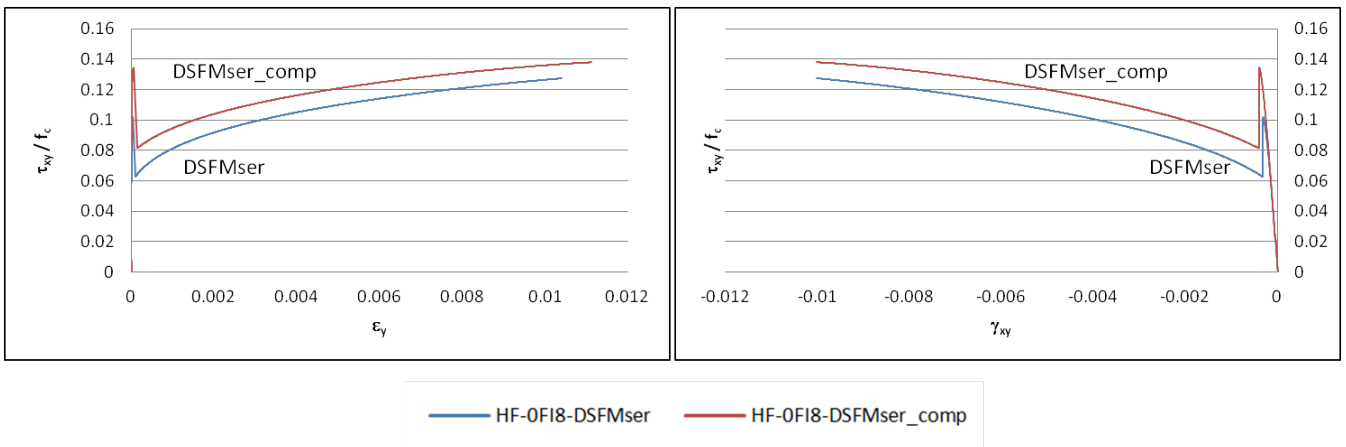


Figura 6.19: Z-HF-0FI8-NF comparado con modelo con compresión lateral.



### 6.2.1.3 Comparación ente HA y HF

A continuación se muestra la figura 6.20 y 6.21 donde se comparan los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores.

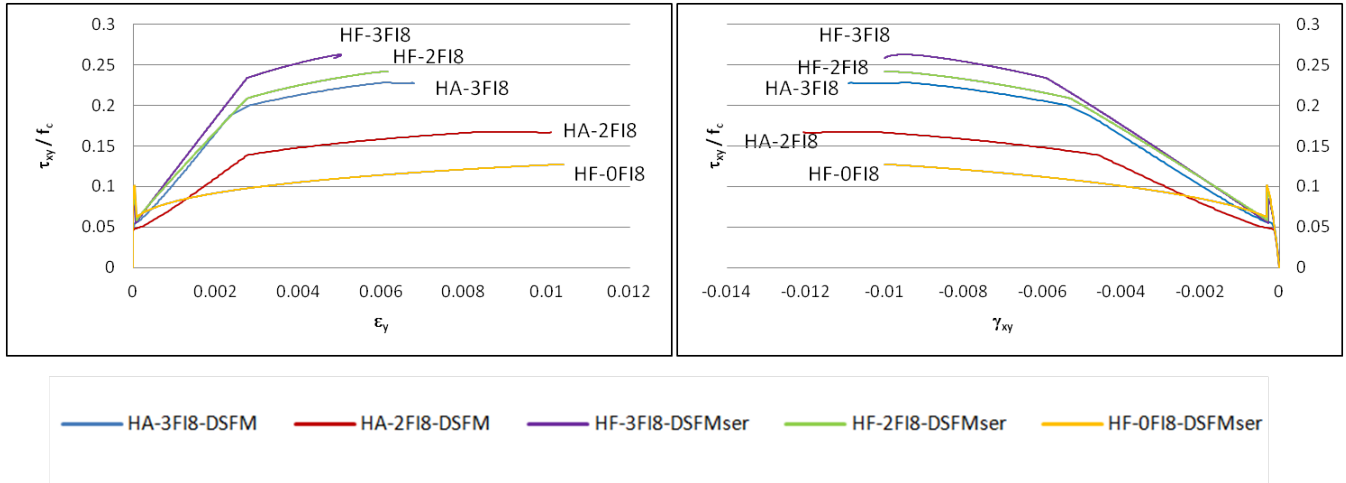


Figura 6.20: Comparativa  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  entre hormigón armado y hormigón armado reforzado con fibras en el modelo material.

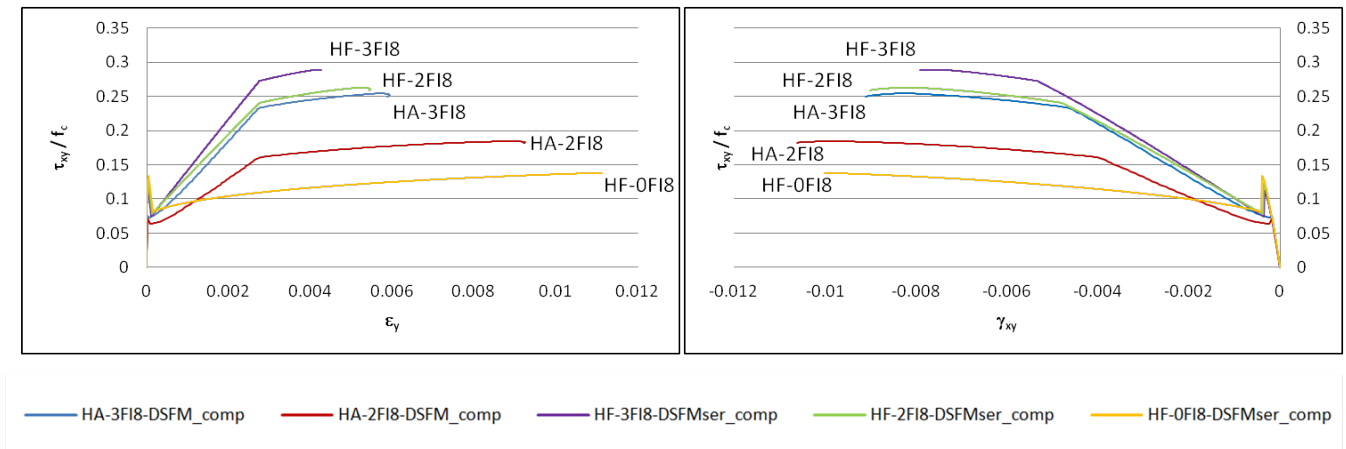


Figura 6.21: Comparativa  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  entre hormigón armado y hormigón armado reforzado con fibras en el modelo material considerando una compresión lateral.

A partir de los resultados obtenidos se pueden obtener las siguientes tablas (tablas 6.4 y 6.5):

Tabla 6.4: Tensión tangencial crítica (de fisuración), tensión tangencial última y resistencia a compresión simple para modelo material para la cuantía de armado  $x_1$  y  $K=1$ .

Probetas	$\tau_{cr}$ (MPa)	$\tau_u$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\tau_u / f_c$
Z-HA-3FI8-NF	1.79	7.42	32.5	0.2282
Z-HA-2FI8-NF	1.82	6.08	36.35	0.1674
Z-HF-2FI8-NF	1.94	7.22	29.82	0.2420
Z-HF-3FI8-NF	2.03	8.88	33.77	0.2631
Z-HF-0FI8-NF	2.17	3.94	30.98	0.1273

Tabla 6.5: Tensión tangencial crítica, tensión tangencial última y resistencia a compresión simple para modelo material con compresión lateral para la cuantía de armado  $x_1$  y  $K=1$ .

Probetas	$\tau_{cr}$ (MPa)	$\tau_u$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\tau_u / f_c$
Z-HA-3FI8-NF	2.44	8.26	32.5	0.2542
Z-HA-2FI8-NF	2.54	6.70	36.35	0.1842
Z-HF-2FI8-NF	2.24	7.84	29.82	0.2630
Z-HF-3FI8-NF	2.53	9.76	33.77	0.2891
Z-HF-0FI8-NF	2.48	4.28	30.98	0.1383

En este punto se lleva a cabo un análisis comparativo de los resultados obtenidos de manera experimental con los obtenidos de manera numérica según el modelo material. Al comparar los gráficos de las figuras 4.20, 4.21 (del capítulo 4), 6.20 y 6.21 (de este mismo capítulo) se observa que las curvas experimentan la misma tendencia. No obstante, aunque la tensión de fisuración se parece, se ve que en el caso del modelo material, se alcanzan tensiones de rotura y deformaciones más altas que en la fotogrametría. Parece que se manifiesta cierta diferencia en la rigidez (ver tabla 6.6).

Tabla 6.6: Comparativa de los ángulos de inclinación de las bielas para ensayo experimental, modelo material y modelo material con compresión lateral, en grados sexagesimales

Probetas	$\theta_{\text{test}}$	$\theta_{\text{DSFM}}$	$\theta_{\text{DSFM-comp}}$
Z-HA-3Fi8-NF	18.43	33.99	31.04
Z-HA-2Fi8-NF	20.83	29.40	26.66
Z-HF-2Fi8-NF	24.67	34.60	32.57
Z-HF-3Fi8-NF	23.30	37.91	35.22
Z-HF-0Fi8-NF	14.43	24.65	22.94

A la vista de la tabla 6.6 se observa que hay una diferencia bastante notoria en los valores de los ángulos de inclinación de las bielas en el plano de corte obtenidos de manera experimental a los obtenidos con el modelo. Esto pone de manifiesto que, aunque se obtengan valores similares de tensiones y deformaciones de forma experimental y con el modelo, dicho modelo no acaba de ajustarse a la realidad. La realidad física muestra que las fisuras aparecen con un ángulo de inclinación que no acaba de verse bien ajustado con el modelo. Por tanto, el modelo no acaba de representar bien la trayectoria de las bielas de compresión en el plano de corte.

### 6.2.2 Modelado con Elementos Finitos

Con el fin de analizar con más detalle el comportamiento de las probetas *push-off* se desarrolla en este apartado una modelización bidimensional mediante elementos finitos de las probetas ensayadas de hormigón armado.

Con el modelo de elementos finitos se consiguen obtener diversos resultados que sirven para comprender mejor el comportamiento tensional del modelo de ensayo tipo *push-off*. En este estudio se modeliza con distintos tipos de materiales: *MatJ2* y *hor2dpan* para el hormigón armado y *acero* para las barras que conforman la armadura discreta. Estos materiales se describen en el capítulo 5. Se utilizan distintos grados de discretización de las armaduras que componen la pieza, tanto las situadas en dirección transversal al plano de corte (cercos: 3Fi8 y 2Fi8) como las que componen el armado general de la pieza. Se pasa de un tratamiento de la armadura totalmente difusa a la discretización de forma gradual hasta llegar a su totalidad.

Para el modelado del hormigón se usan elementos finitos tipo cuadrilátero tanto de 4 como de 9 nodos. El armado se modeliza con elementos finitos tipo barra a medida que se van discretizando (ver figura 6.22).

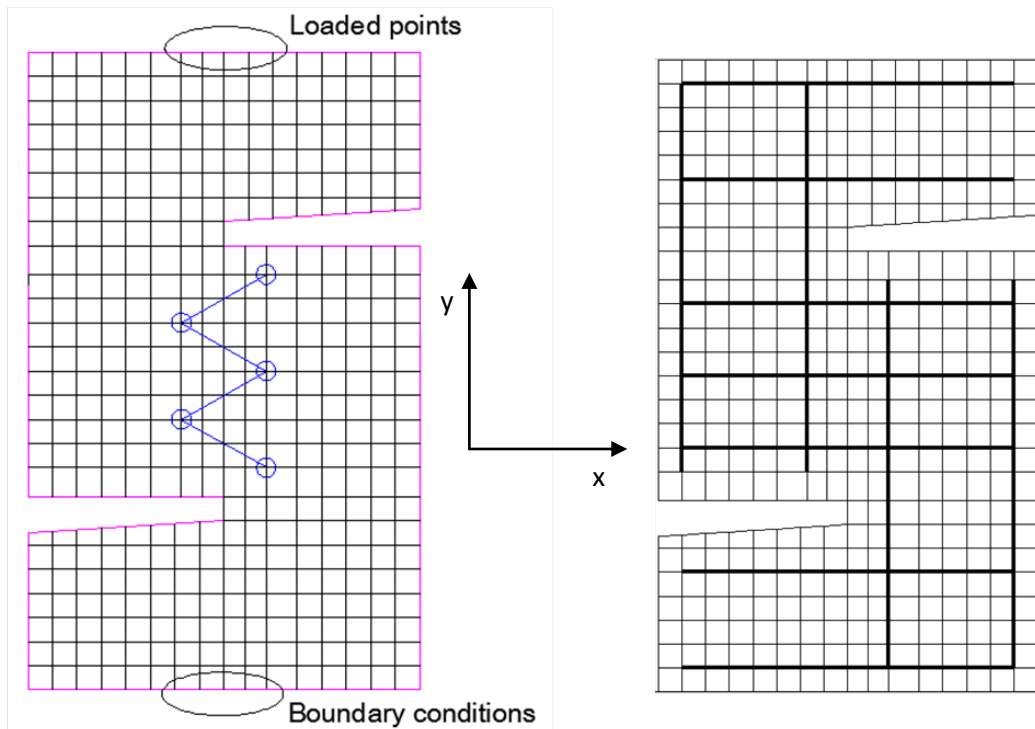


Figura 6.22: Mallado con el elemento finito tipo cuadrilátero: (izquierda) posición de los puntos Demec, de los puntos de carga y las condiciones de contorno, (derecha) posición de las armaduras cuando se considera el modelo con armadura totalmente discreta.

En cuanto a las condiciones de contorno se modela el apoyo del *push-off* en su cara inferior mediante apoyos fijos en los que se ha impedido el desplazamiento vertical (ver figura 6.23). Por otra parte, la carga se ha aplicado mediante incrementos siguiendo un procedimiento de desplazamiento vertical impuesto. Con este modo de aplicación de la carga se pretende simular el modo en el que el gato hidráulico va aplicando mediante deformación la carga a la probeta. En este trabajo se han aplicado varias magnitudes de desplazamiento vertical en distintos pasos. Se han aplicado desplazamientos verticales desde 0.5mm a 2mm en incrementos o escalones de carga de 10 a 400 pasos (ver anejo C).

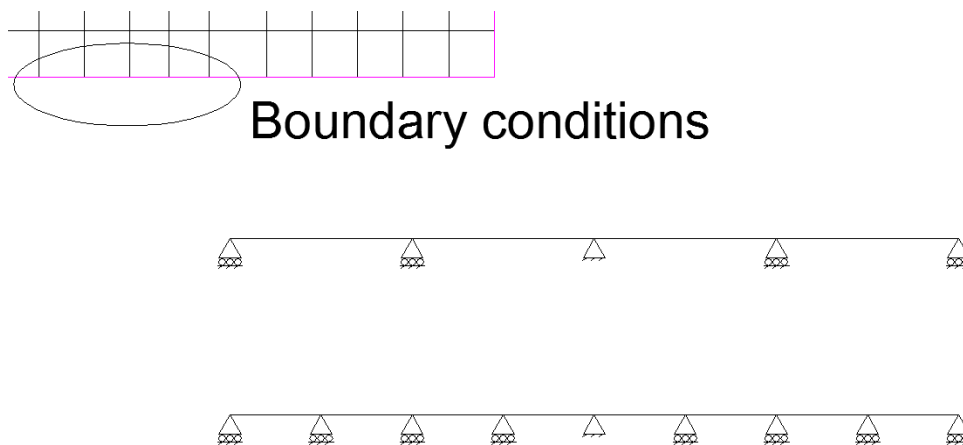


Figura 6.23: Condiciones de contorno para el mallado con cuadrilátero de 4 nodos y para el mallado con cuadrilátero de 9 nodos.

En el anejo C de este mismo trabajo se puede observar los resultados aplicando las distintas modelizaciones en función de los nodos del cuadrilátero, del material y de la discretización de las armaduras para la probeta de hormigón armado Z-HA-3FI8-NF.

A continuación se muestran los resultados tensionales obtenidos en el momento de la rotura para las probetas de hormigón armado teniendo en cuenta una modelización con cuadriláteros de cuatro nodos, material *hor2dpan* para el hormigón armado y una discretización total de las armaduras con material *acero*. Este es el modelo que se considera más adaptado a la realidad de los expuestos en el anejo C:

- Para Z-HA-3FI8-NF (ver figuras 6.24 y 6.25):

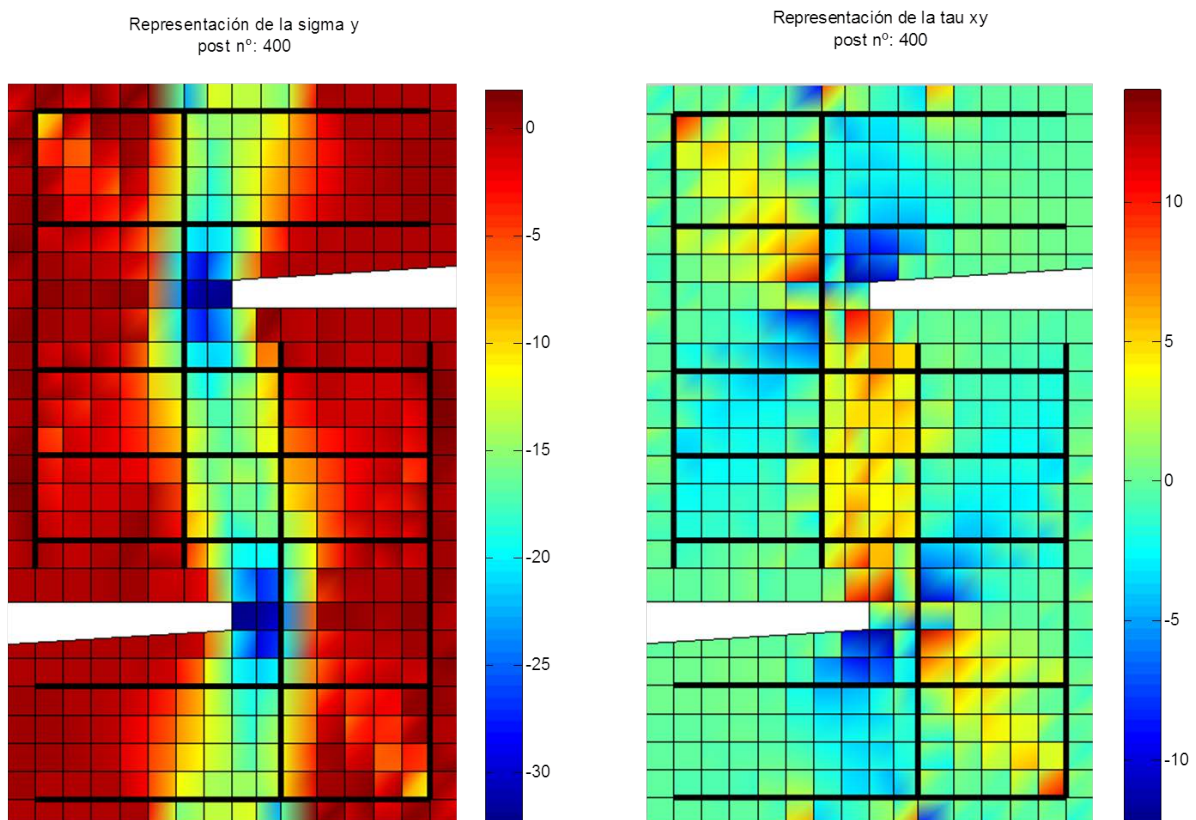


Figura 6.24: Probeta Z-HA-3FI8-NF en rotura: (izquierda) tensiones  $\sigma_y$ , (derecha) tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$ . Uds: MPa.

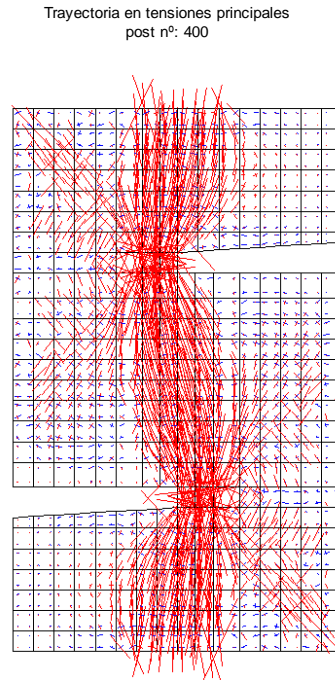


Figura 6.25: Probeta Z-HA-3FI8-NF en rotura: Trayectorias de tensiones principales en compresión y tracción

- Para Z-HA-2FI8-NF (ver figuras 6.26 y 6.27):

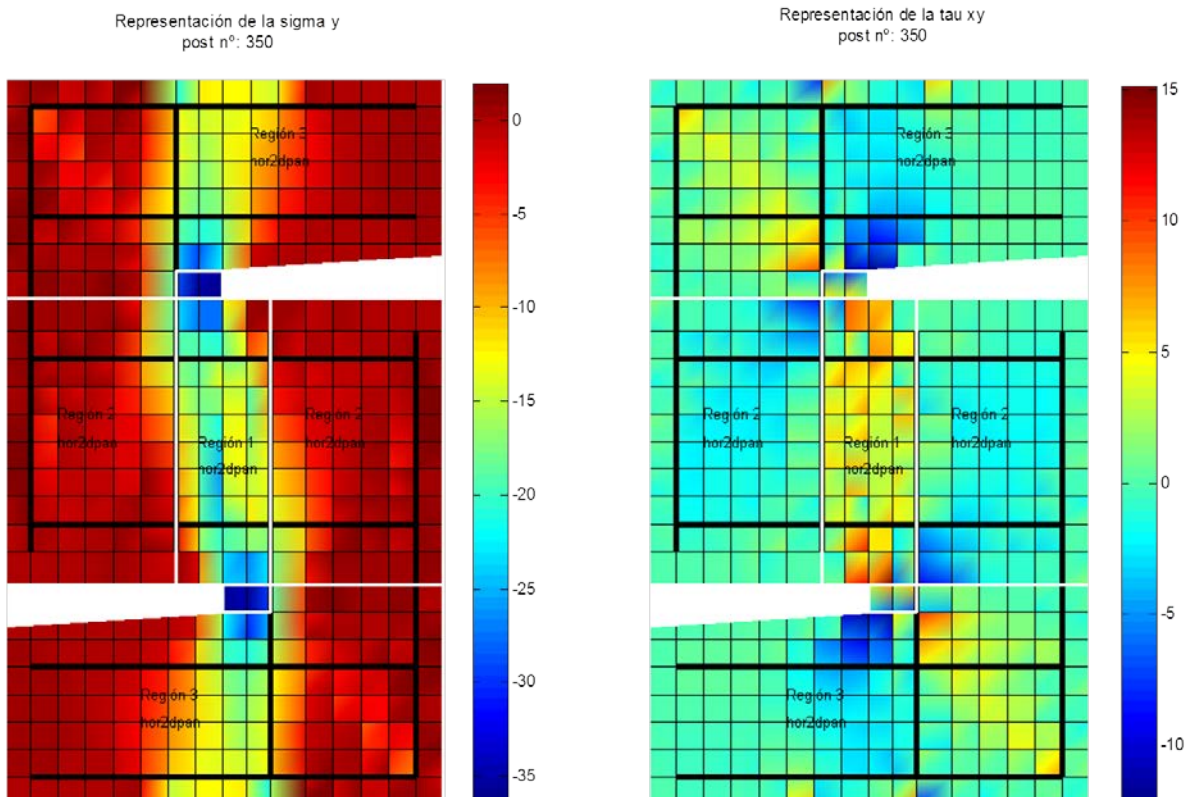
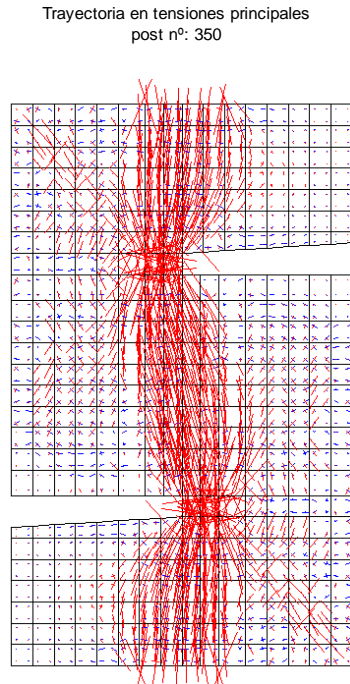


Figura 6.26: Probeta Z-HA-2FI8-NF en rotura: (izquierda) tensiones  $\sigma_y$ , (derecha) tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$ . Uds: MPa.



*Figura 6.27: Probeta Z-HA-2FI8-NF en rotura: Trayectorias de tensiones principales en compresión y tracción*

Se puede observar valores de tensión de compresión muy altos en la zona de las entallas que es donde más se castiga a la pieza y por donde se produce el colapso por compresión. Se denota la alta concentración tensional en el pasillo formado por el plano de corte. En las figuras 6.25 y 6.27 se muestra la trayectoria de las tensiones que pone de manifiesto este hecho. Es en esta zona donde se genera el mecanismo de celosía y por donde aparecen las fisuras con su inclinación característica, tal y como se muestra en las figuras 6.25 y 6.27. Se puede observar también en dichas figuras que las direcciones principales de compresiones son bastante constantes a lo largo de todo el plano de corte y con una inclinación bastante similar a la observada en el ensayo experimental. Esto implica que la distribución de tensiones tangenciales en el plano de corte en las figuras 6.24 y 6.26 (derecha) es bastante constante a excepción de la zona cercana a las entallas en las que se producen algunas distorsiones locales. No obstante a lo largo de la mayor parte del plano de cortante se observa una cierta estabilidad. Esto es acorde a lo medido experimentalmente mediante la fotogrametría y los puntos Demec.

Se ha procedido también a comparar los campos de deformaciones con los obtenidos experimentalmente mediante fotogrametría, tanto para las deformaciones en el eje horizontal (dirección x, ver figura 6.22) de la probeta como para las distorsiones angulares. Se ha podido observar que el comportamiento numérico con elementos finitos ha resultado ser mucho más rígido que el observado experimentalmente y con el modelo material (ver figuras 6.28 y 6.29). Esto ha originado que en el modelo de elementos finitos se alcance la rotura en la zona de las entallas por excesivas compresiones en el hormigón cuando las armaduras transversales que cruzan el plano de corte todavía se encuentran con valores bajos de tensiones de tracción todavía lejanos a su límite elástico. Este hecho resulta muy sorprendente dado que se

registraron deformaciones en dirección x (ver figura 6.22) de valores bastante notables y muy superiores al límite de plastificación.

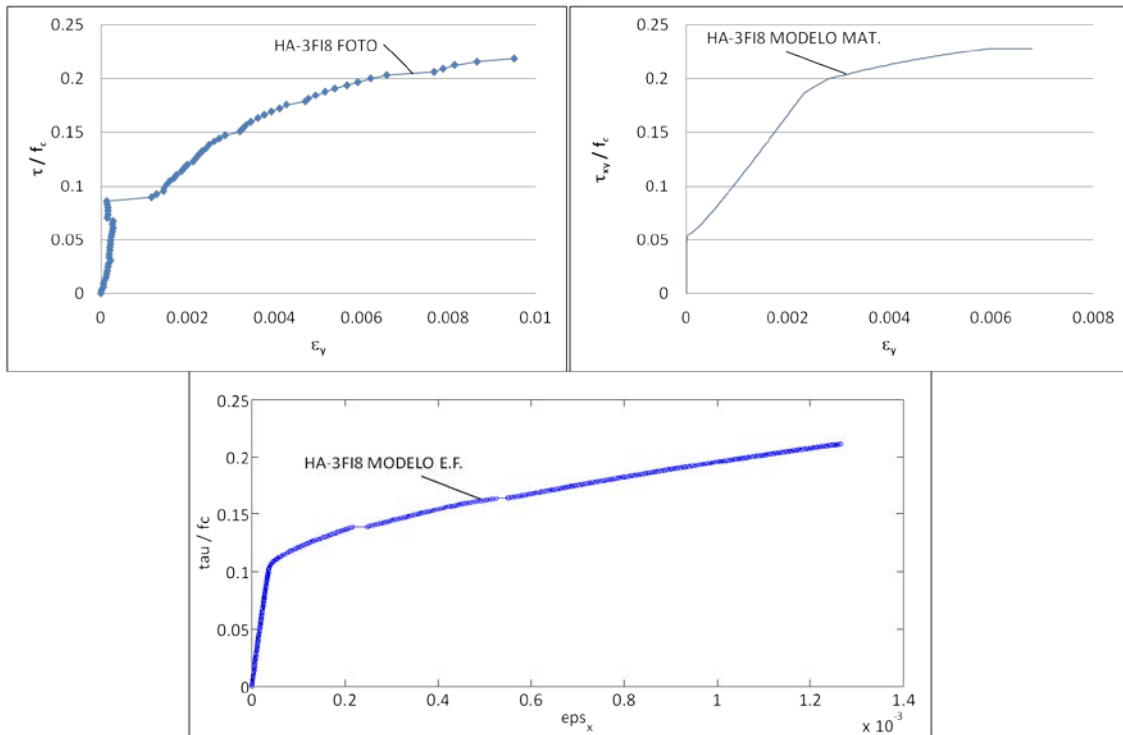


Figura 6.28: Probeta Z-HA-3F18-NF. Comparación  $\epsilon_y$  con fotogrametría, modelo material y modelo de elementos finitos

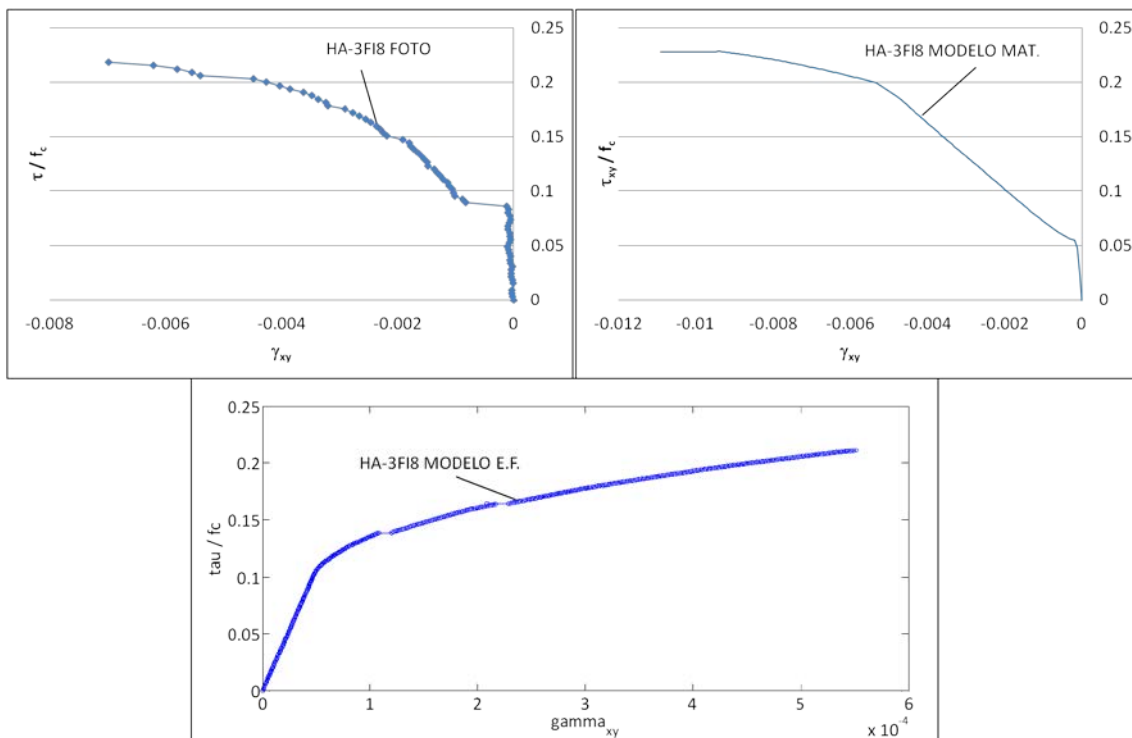


Figura 6.29: Probeta Z-HA-3F18-NF. Comparación  $\gamma_{xy}$  con fotogrametría, modelo material y modelo de elementos finitos



Con el fin de dar una respuesta a esto se puede decir que la modelización por elementos finitos se ha llevado a cabo sin tener en cuenta algunos efectos que pueden tener una relevancia esencial en la respuesta deformacional del ensayo. Como ya se ha mencionado, se modelan las armaduras discretas con elementos finitos tipo barra que sólo tienen respuesta axial. Ello da lugar a que no se tenga en cuenta el efecto pasador de las barras que constituyen los cercos en la armadura transversal al plano de corte. Es decir, sólo se considera que las barras trabajan a tracción. Este efecto puede tener bastante relevancia ya que la probeta rompe por cortante siguiendo la dirección del plano de corte y, por consiguiente, las armaduras que lo atraviesan deben de contribuir a la resistencia en esta dirección. Tampoco se tiene en cuenta un posible deslizamiento de esta armadura.

También resulta conflictiva la zona de las entallas. Aquí es donde se produce la rotura por aplastamiento de las bielas de compresión. Es en esta zona donde se producen las mayores dificultades a la hora de estabilizar el modelo numérico. Es en estos puntos donde el modelo necesita ser más robusto y estable.

Todas estas cuestiones hacen que se generen inexactitudes a la hora de obtener los gráficos tensión-deformación por el método de elementos finitos.

Se desprende del análisis mediante el modelo de los elementos finitos que es esencial modelar el comportamiento del cortante fricción haciendo trabajar a las armaduras en dirección transversal a parte de en dirección normal.

### 6.3. Conclusiones numéricas

En este punto se detallan, a modo resumen, las conclusiones numéricas que se obtienen.

Con respecto a la modelización numérica llevada a nivel material:

- La modelización a nivel material de los ensayos *push-off* de RC y SFRC muestran tendencias similares a los valores obtenidos experimentalmente
- Se observa una clara influencia del tipo de análisis a realizar en función de la combinación de tensiones normales y tangenciales a tener en cuenta. Esto tiene una influencia importantísima en el ángulo de inclinación de bielas.
- La modelización que incluye el efecto de las tensiones normales de compresión arroja resultados más similares a los obtenidos experimentalmente en cuanto al ángulo de inclinación de bielas.
- A la vista de la tabla 6.6 se observa que hay una diferencia bastante notoria en los valores de los ángulos de inclinación de las bielas en el plano de corte obtenidos de manera experimental a los obtenidos con el modelo. Esto pone de manifiesto que, aunque se obtengan valores similares de tensiones y deformaciones de forma experimental y con el modelo, dicho modelo no acaba de ajustarse a la realidad. La realidad física muestra que las fisuras aparecen con un ángulo de inclinación que no acaba de verse bien ajustado con el modelo. Por

tanto, el modelo no acaba de representar bien la trayectoria de las bielas de compresión en el plano de corte.

Con respecto a la modelización 2D mediante elementos finitos:

- En la situación de rotura se alcanzan tensiones de agotamiento en el hormigón en el entorno de la entalla tal y como se observó experimentalmente
- Las direcciones principales de compresiones son bastante constantes a lo largo de todo el plano de corte y con una inclinación bastante similar a la observada en el ensayo experimental.
- La distribución de tensiones tangenciales en el plano de corte es bastante constante a excepción de la zona de las entallas en las que se producen distorsiones locales.
- En cuanto a la comparación con los campos de deformaciones obtenidos experimentalmente y con el modelo material se ha podido observar que el comportamiento numérico con elementos finitos ha resultado ser mucho más rígido (ver figuras 6.28 y 6.29).
- La modelización de las armaduras que cruzan el plano de corte deben incluir el efecto pasador junto con la interacción con las tensiones normales incluidas en las armaduras. También debería considerarse el efecto del deslizamiento de las armaduras con respecto a la matriz de hormigón.

## Capítulo 7:

# Conclusiones y futuras líneas de investigación

### 7.1. Síntesis final

En el trabajo aquí presentado se ha realizado un estudio experimental y de modelización numérica del comportamiento frente a tensiones tangenciales de elementos de hormigón armado y hormigón armado y reforzado con fibras de acero. Esto se ha llevado a cabo a través de dos bloques diferenciados: un estudio experimental y una modelización numérica a partir del ensayo tipo *push-off* sin fisuración previa.

El fallo por cortante en probetas tipo *push-off* sin fisuración previa ocurre tras la formación de numerosas fisuras en una dirección inclinada desde el plano de corte. El fallo final, normalmente, se produce debido al aplastamiento del hormigón en las bielas de compresión formadas aproximadamente paralelas a la dirección de las fisuras. La compresión que se produce entre las bielas de compresión y la tracción que transmiten las armaduras, tanto las que cruzan el plano de corte como las paralelas a éste, originan un mecanismo resistente de celosía.

El programa experimental planteado en este proyecto ha consistido en la preparación de 10 probetas tipo *push-off* sin fisuración previa que han sido ensayadas frente a cortante. Estas probetas han sido fabricadas con diferentes hormigones: 4 probetas de hormigón armado (RC), 4 probetas de hormigón armado reforzado con fibras de acero (SFRC) y 2 probetas de hormigón sólo con fibras de acero. Se ha dispuesto, por cada ensayo, de tres fuentes de información tanto para la obtención de desplazamientos como para la obtención de deformaciones: fotogrametría, puntos Demec y transductores de desplazamiento.

La modelización numérica se ha llevado a cabo con una modelización a nivel material tanto del RC como del SFRC y, como complemento, se realiza un modelo de elementos finitos de las piezas fabricadas con RC. Se describen los distintos materiales que se usan tanto en la modelización como punto material como cuando se modela con el uso de elementos finitos. La determinación de los materiales 2D que se usan para modelar el comportamiento constitutivo del RC: DSFM, hor2dpan y MatJ2 se ha llevado a cabo mediante el análisis directo, mientras que en la determinación del material 2D DSFM-Ser para modelar el comportamiento constitutivo de tracción del SFRC se ha usado el análisis inverso. El modelo de elementos finitos se ha generado con distintos grados de discretización y con el uso de distintos tipos de elementos: cuadrilátero de nueve nodos, cuadrilátero de cuatro nodos y elemento barra de dos nodos.

## 7.2. Conclusiones

En este punto se muestran las conclusiones obtenidas procedentes de la campaña experimental y las procedentes de la modelización numérica.

Conclusiones de la campaña experimental:

- Se observa que las deformaciones en dirección  $y$  ( $\varepsilon_y$ ) y las distorsiones angulares ( $\gamma_{xy}$ ) son estables en los tres métodos utilizados: fotogrametría, puntos Demec y transductores de desplazamiento, similar a otros ensayos de panel realizados por otros autores [23], [26] y [29].
- Se ha constatado que la distribución de deformaciones en dirección  $y$  ( $\varepsilon_y$ ) y las distorsiones angulares ( $\gamma_{xy}$ ) se mantienen prácticamente constantes a lo largo del plano de corte de las probetas push-off.
- Se puede distinguir claramente el comportamiento no fisurado, el fisurado y la posterior rotura así como la plastificación de las armaduras transversales.
- Las probetas con fibras presentan mayor rigidez a cortante que las de hormigón armado principalmente tras la fisuración debido a la utilización de fibras de corta longitud.

Conclusiones numéricas:

Con respecto a la modelización numérica llevada a nivel material:

- La modelización a nivel material de los ensayos *push-off* de RC y SFRC muestran tendencias similares a los valores obtenidos experimentalmente.
- Se observa una clara influencia del tipo de análisis a realizar en función de la combinación de tensiones normales y tangenciales a tener en cuenta. Esto tiene una influencia muy significativa en el ángulo de inclinación de bielas.
- La modelización que incluye el efecto de las tensiones normales de compresión arroja resultados más similares a los obtenidos experimentalmente en cuanto al ángulo de inclinación de bielas.
- Se observa que hay una diferencia bastante notoria en los valores de los ángulos de inclinación de las bielas en el plano de corte obtenidos de manera experimental a los obtenidos con el modelo. Esto pone de manifiesto que, aunque se obtengan valores similares de tensiones y deformaciones de forma experimental y con el modelo, dicho modelo no acaba de ajustarse a la realidad. La realidad física muestra que las fisuras aparecen con un ángulo de inclinación que no acaba de verse bien ajustado con el modelo. Por tanto, el modelo no acaba de representar bien la trayectoria de las bielas de compresión en el plano de corte.

Con respecto a la modelización 2D mediante elementos finitos:

- En la situación de rotura se alcanzan tensiones de agotamiento en el hormigón en el entorno de la entalla tal y como se observó experimentalmente
- Las direcciones principales de compresiones son bastante constantes a lo largo de todo el plano de corte y con una inclinación bastante similar a la observada en el ensayo experimental.
- La distribución de tensiones tangenciales en el plano de corte es bastante constante a excepción de la zona de las entallas en las que se producen distorsiones locales.
- En cuanto a la comparación con los campos de deformaciones obtenidos experimentalmente y con el modelo material se ha podido observar que el comportamiento numérico con elementos finitos ha resultado ser mucho más rígido.
- La modelización de las armaduras que cruzan el plano de corte debe incluir el efecto pasador junto con la interacción con las tensiones normales incluidas en las armaduras. También debería considerarse el efecto del deslizamiento de las armaduras con respecto a la matriz de hormigón.

### 7.3. Futuras líneas de investigación

Tras la exposición del trabajo final de máster, se proponen las siguientes posibilidades como futuras líneas de investigación:

Campaña experimental:

- La posibilidad de realizar una campaña experimental con una mayor población de ensayos push-off sin fisuración previa fabricados con hormigón armado y con hormigón armado y reforzado con fibras de acero.
- La posibilidad de realizar una campaña experimental con vigas fabricadas con hormigón armado y con hormigón armado y reforzado con fibras de acero.

Modelización numérica:

- La posibilidad de enriquecer el modelo material 2D teniendo en cuenta nuevos factores como: el efecto pasador de las armaduras, el engranamiento de áridos y la adherencia de las armaduras transversales al plano de corte.
- La posibilidad de controlar de una manera más exhaustiva algunos parámetros del modelo material como es el ángulo de inclinación de las bielas en el plano de corte.

- La posibilidad de realizar una discretización con mayor número de elementos finitos en las zonas más conflictivas del ensayo push-off como las entallas y la parte lateral externa del bloque.
- La posibilidad de utilizar el modelo material DSFM-Ser para la modelización mediante elementos finitos del hormigón armado y reforzado con fibras de acero.
- La posibilidad de realizar la modelización numérica de ensayos de vigas fabricadas con hormigón armado y reforzado con fibras de acero.

## Referencias bibliográficas

- [1] ACI-ASCE COMMITTEE 426, "The Shear Strength of Reinforced Concrete Members", Journal of the Structural Division, Vol. 99, No. 6, 1973, pp. 1091-1187.
- [2] ASCE-ACI COMMITTEE 445 ON SHEAR AND TORSION, "Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete", Journal of Structural Engineering, Vol. 124, No. 12, 1998, pp.1375-1416.
- [3] VECCHIO F.J. and COLLINS M.P., "Stress-strain characteristics of reinforced concrete in pure shear", IABSE reports of the working commissions, Vol.34, 1981, pp. 211-225.
- [4] SUSETYO J., GAUVREAU P., VECCHIO F.J., "Effectiveness of Steel Fiber as Minimum Shear Reinforcement", ACI Structural Journal, Vol. 108, No. 4, 2011, pp. 488-496.
- [5] MATTOCK A.H., and HAWKINS N. M., "Shear-Transfer in Reinforced Concrete-Recent Research", Journal of the Prestressed Concrete Institute, Vol. 20, No. 2, 1972, pp. 55-75.
- [6] HSU T.T.C, MAU S.T., and CHEN B. "Theory of Shear Transfer Strength of Reinforced Concrete", ACI Structural Journal, Vol. 84, No. 2, 1987, pp. 149-160.
- [7] WALRAVEN J.C., FRENAY J., and PRUIJSSERS A., "Influence of Concrete Strength and Load History on the Shear Friction Capacity of Concrete Members", Journal of the Prestressed Concrete Institute, Vol. 32, No. 1, 1987, pp. 66-84.
- [8] MATTOCK A.H., "Shear-Friction and High-Strength Concrete", ACI Structural Journal, Vol.98, No. 1, 2001, pp. 50-59.
- [9] RAHAL K. N., "Shear-Transfer Strength of Reinforced Concrete", ACI Structural Journal, Vol.107, No. 4, 2010, pp. 419-426.
- [10] MATTOCK A.H., JOHAL L., and CHOW H.C., "Shear transfer in reinforced concrete with moment or tension acting across the shear plane", PCI Journal, Vol. 20, No. 4, 1975, pp. 76-93.
- [11] BRESLER B., and SCORDELIS A.C., "Shear strength of reinforced concrete beams" J. Am. Concr. Inst., 60 (1), 1963, pp. 51-72.
- [12] WALRAVEN J.C., "The influence of depth on the shear strength of lightweight concrete beams without shear reinforcement", Stevin Report 5-78-4, Delft Univ. of Tech., Delft, Netherlands, 1978.
- [13] WANG Q.B., "Shear strength of reinforced concrete beams and slabs without shear reinforcement. Part 2: Predictor-corrector analysis of a Walraven-beam." Report 25.2-89-2-10, Delft Univ. of Tech., Delft, Netherlands, 1989.
- [14] VECCHIO F.J., and SHIM W., "Experimental and Analytical Reexamination of Classic Concrete Beam Tests", Journal of Structural Engineering, Vol. 130, No. 3, 2004, pp. 460-469.
- [15] HOFBECK J.A., IBRAHIM I.O., and MATTOCK A.H., "Shear Transfer in Reinforced Concrete", ACI Journal, Title no. 66-13, 1969, pp. 119-128.
- [16] BIRKELAND P.W., and BIRKELAND H.W., "Connections in Precast Concrete Construction", ACI Journal, Proceedings Vol. 63, No. 3, 1966, pp. 345-368.
- [17] MAST R.F., "Auxiliary Reinforcement in Concrete Connections", Proceedings, ASCE, Vol. 94, ST6, 1968, pp. 1485-1504.
- [18] ZIA P., "Torsional Strength of Prestressed Concrete Members", ACI Journal, Proceedings

- Vol. 57, No. 10, 1961, pp. 1337-1360.
- [19] "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-71)", American Concrete Institute, 1971.
- [20] MATTOCK A.H., LI W.K. and WANG T.C., "Shear transfer in lightweight reinforced concrete", PCI Journal, Vol. 21, No. 1, 1976, pp. 20-39.
- [21] "PCI Design Handbook", Prestressed Concrete Institute, 1971.
- [22] WALRAVEN J.C., "Fundamental Analysis of Aggregate Interlock," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 107, No. 11, 1981, pp. 2245-2270.
- [23] VECCHIO F., and COLLINS M.P., "The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear," ACI Journal, Vol. 83, No. 2, 1986, pp. 219-231.
- [24] MITCHELL D., and COLLINS M.P., "Diagonal Compression Field Theory- A Rational Model for Structural Concrete in Pure Torsion" ACI Journal, Proceedings, Vol. 71, No. 8, 1974, pp. 396-408.
- [25] COLLINS M.P., "Towards a Rational Theory for RC Members in Shear", Proceedings, ASCE, Vol. 104, ST4, 1978, pp. 649-666.
- [26] VECCHIO F., and NIETO M., "Shear-Friction Test on Reinforced Concrete Panels", ACI Structural Journal, Vol. 88, No. 3, 1991, pp. 371-379.
- [27] VECCHIO F.J., "Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Formulation", Journal of Structural Engineering, Vol.126, No. 9, 2000, pp. 1070-1077.
- [28] VECCHIO F.J., "Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Implementation", Journal of Structural Engineering, Vol.127, No. 1, 2001, pp. 12-20.
- [29] VECCHIO F.J., LAI D., and SHIM W., NG J., "Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Validation", Journal of Structural Engineering, Vol.127, No. 4, 2001, pp. 350-358.
- [30] RAHAL K. N., "Simplified Design and Capacity Calculation of Shear Strength in Reinforced Concrete Membrane Elements", Engineering Structures, V.30, No. 10, 2008, pp. 2782-2791.
- [31] RAHAL K. N., "Shear Strength of Reinforced Concrete, Part II: Beams Subjected to Shear, Bending Moment and Axial Loads", ACI Structural Journal, V. 97, No. 2, Mar.-Apr. 2000, pp. 219-224.
- [32] RAHAL K.N., "Torsional Strength of Reinforced Concrete Beams" Canadian Journal of Civil Engineering, V. 27 , No. 3, June 2000, pp. 445-453.
- [33] RAHAL K.N., "Combined Torsion and Bending in Reinforced and Prestressed Concrete beams Using SMCS", ACI Structural Journal, V. 104, No. 4, July-Aug. 2007, pp. 402-411.
- [34] BAROSIO M., "Modelización de Elementos Lineales de HRFA", Trabajo Fin de Máster, Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Universitat Politècnica de València, 2011, 262 pp.
- [35] LIM T. Y., PARAMASIVAM P., and LEE S. L., "Analytical model for tensile behavior of Steel Fiber concrete"; ACI Material Journal (1987), vol. 84, no. 4, pp. 286-298.
- [36] KOVÁCS I., and BALÁZS G., "Structural performance of steel fiber reinforced concrete"; Prepared for the Second International Conference of Fiber reinforced Concrete, Budapest University of Technology and Economics, Budapest, Hungary, 2004.
- [37] DUPONT D., and VANDEWALLE L., "Modeling SFRC with a stress-strain approach"; Proceeding of International Symposium: Role of Concrete in Sustainable Development, Dundee, Scotland, 2003.
- [38] LOK T. S., and XIAO J. R., "Tensile behavior and moment-curvature relationship of steel fibre reinforced concrete"; Magazine of Concrete Research (1998), vol. 50, no. 4, pp. 359-368.



- [39] SERNA ROS P., and FUSTER GARCÍA P., "Comportamiento mecánico de los hormigones de fibras. Determinación del comportamiento a tracción a partir del ensayo a flexión"; *Cemento y Hormigón* (1985), vol. 621, pp. 715-732.
- [40] KOOIMAN A. G., "Modeling steel fiber reinforced concrete for structural design"; PhD Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, The Netherlands, 2000.
- [41] STRACK M., "Modeling of crack opening in steel reinforced concrete under tension and bending"; Seventh International RILEM Symposium on fibre reinforced concrete, Institute for Reinforced and Prestressed Concrete Structures, Ruhr University, Bochum, Germany, 2008.
- [42] LEE M. K., and BARR B., "Describing the stress-crack opening relationship using a three-exponential model"; *Magazine of Concrete Research* (2005), vol. 57, no. 9, pp. 567-577.
- [43] RILEM TC 162-TDF; "Test and design methods for steel fiber reinforced concrete"; *Material and Structures* (2003), vol. 36, pp. 560-567.
- [44] CNR-DT 204; "Istruzioni per la progettazione, l'esecuzione ed il controllo di strutture di calcestruzzo fibrorinforzato"; Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma, Italia, 2006.
- [45] EHE-08, "Instrucción Española del Hormigón Estructural 2008", Ministerio de Fomento, España, 2008.
- [46] BARRAGÁN B., GETTU R., AGULLÓ L., and ZERBINO R., "Shear Failure of Steel Fiber-reinforced Concrete Based on Push-off", *ACI Structural Journal*, V. 103, No. 4, July 2006, pp. 251-257.
- [47] LEE H. L., HWANG J. H., JU H., KIM K. S., and KUCHMA D. A., "Nonlinear Finite Element analysis of Steel Fiber-reinforced Concrete Members Using Direct Tension Force Transfer Model", *Elsevier, Finite Elements in Analysis and Design* 50, 2012, pp. 266-286.
- [48] SUSETYO J., "Fiber Reinforcement for Shrinkage Crack Control in Prestressed, Precast Segmental Bridges", Ph.D. Dissertation, University of Toronto, 2009, 307 pp.
- [49] KIM S. K., LEE D. H., HWANG J. H., and KUCHMA D. A., "Shear Behavior Model for Steel Fiber-reinforced Concrete Members without Transverse Reinforcements", *Elsevier, Composites: Part B* 43, 2012, pp. 2324-2334.
- [50] ACI COMMITTEE 544, "Design consideration for steel fiber reinforced concrete" (ACI 544 R-88), *ACI Structural Journal* 85 (5), 1988, pp. 563-580.
- [51] JANIS O., "New Frontiers for Steel Fiber-reinforced Concrete", *Concrete International* 30 (5), 2008, pp. 45-50.
- [52] ROMUALDI J. P., and MANDEL J. A., "Tensile Strength of Concrete Affected by Uniformly Distributed and Closely Spaced Short Lengths of Wire Reinforcement", *ACI Journal Proceedings* 61 (6), 1964, pp. 657-671.
- [53] BATSON G., JENKINS E., and SPATNEY R., "Steel Fibers as a Shear Reinforcement in Beams", *ACI Journal Proceedings* 69 (10), 1972, pp. 640-644.
- [54] SWAMY R. N., and BAHIA H. M., "Influence of Fiber Reinforcement on Dowel Resistance to Shear", *ACI Journal Proceeding* 76 (2), 1979, pp. 327-355.
- [55] SHARMA A. K., "Shear Strength of Steel Fiber Reinforced Concrete beams", *ACI Journal Proceedings* 83 (4), 1986, pp. 624-628.
- [56] AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, "ACI Manual of Concrete Practice 2008 , part 6", ACI 504R-90 (97) to ACI ITG-4.3R-0.7, 2008.
- [57] NARAYANAN R., and DARWISH I. Y. S., "Use of Steel Fibers as Shear Reinforcement", *ACI Structural Journal* 84 (3), 1987, pp. 216-227.
- [58] ASHOR S. A., HASSANAIN G. S., and WAFI F.F., "Shear Behavior of High-strength Fiber Reinforced Concrete Beams", *ACI Structural Journal* 89 (2), 1992, pp. 176-184.
- [59] KHUNTIA M., STOJADINOVIC B., and GOEL S.C., "Shear Strength of Normal and High-

- strength Fiber Reinforced Concrete without Stirrups", *ACI Structural Journal* 96 (2), 1999, pp. 282-289.
- [60] OH Y. H., and KIM J. H., "Estimation of Flexural and Shear Strength for Steel Fiber Reinforced Flexural Members without Shear Reinforcements", *Journal of the Korea Concrete Institute* 20 (2), 2008, pp. 257-267.
- [61] TAN K. H., and MANSUR M. A., "Shear Transfer in Reinforced Fiber Concrete", *Journal of Materials in Civil Engineering, ASCE* 2 (4), 1990, pp. 202-214.
- [62] HSU T. T. C., "Softened Truss Model Theory for Shear and Torsion", *ACI Structural Journal* 85 (5), 1988, pp. 624-635.
- [63] TAN K. H., MURUGAPPAN K., and PARAMASIVAM P., "Shear Behavior of Steel Fiber Reinforced Concrete Beams", *ACI Structural Journal* 89 (6), 1992, pp. 3-11.
- [64] LIHUA X., YIN C., and DONGTAO X., "Nonlinear Finite Element Analysis of Steel Fiber Reinforced Concrete Deep Beams", *Journal of Natural Science* 13 (2), 2008, pp. 201-206.
- [65] PARAMASIVAM P., TAN K. H., and MURUGAPPAM K., "Finite Element Analysis of Partially Prestressed Steel Fiber Concrete Beams in Shear", *Advanced Cement Based Materials* 2 (6), 1995, pp. 231-239.
- [66] LIM T. Y., PARAMSIVAM P., and LEE S. L., "Shear and Moment Capacity of Reinforced Steel-fiber-concrete Beams", *Magazine of Concrete Research* 39 (140), 1987, pp. 148-160.
- [67] MANSUR M. A., ONG K. C. G., and PARAMSIVAM P., "Shear Strength of Fibrous Concrete Beams without Stirrups", *J. Struct. Eng.*, 112 (9), 1986, pp. 2066-2079.
- [68] LI V., WARD R., and HAMZA A. M., "Steel and Synthetic Fibers as Shear Reinforcement", *ACI Mater J.*, 89 (5), 1992, pp. 499-508.
- [69] JUNIOR S. F., and HANAI J. B., "Shear Behavior of Fiber Reinforced Beams", *Cem. Concr. Compos.*, 19 (4), 1997, pp. 359-366.
- [70] TIBERTI G., MINELLI F., PLIZZARI G. A., and VECCHIO F. J., "Influence of Concrete Strength on Crack Development in SFRC Members", *Elsevier, Cement and Concrete Composites* n.45, 2013, pp 176-185.
- [71] CEB-FIP Model Code for Concrete Structures, Comité Euro-International du Béton and Fédération Internationale de la Précontrainte. 3rd ed., CEB, Paris, France; 1978, 348 pp.
- [72] Model Code 2010, Final Complete Draft, *FIB Bull: 2012* [65 and 66, March 2012-ISBN 978-288394-105-2 and April 2012-ISBN 978-2-88394-106-9].
- [73] DELUCE J. R., LEE S. C., and VECCHIO F. J., "Crack Model for Steel Fiber-Reinforced Concrete Members Containing Conventional Reinforcement", *ACI Structural Journal*, V.111, No. 1, 2014, pp. 93-102.
- [74] DUPONT D., and VANDEWALLE L., "Calculation of Crack Widths with  $\sigma$ - $\varepsilon$  Method", *Test and Design Methods for Steel Fiber Reinforced Concrete: Background and Experiences- Proceedings of the RILEM TC162-TDF Workshop*, RILEM Technical Committee 162-TDF, Bochum, Germany, 2003, pp. 119-144.
- [75] MOFFATT K., "Analyse de Dalles de Pont avec Armature Réduite et Béton de Fibres Métalliques", MScA thesis, École Polytechnique de Montréal, Montreal, QC, Canada, 2001, 248 pp.
- [76] DELUCE J. R. , and VECCHIO F. J., "Cracking Behavior of Steel Fiber-reinforced Concrete Members Containing Conventional Reinforcement", *ACI Structural Journal*, V. 110, No. 3, May-June 2013, pp. 481-490.
- [77] BISCHOFF P. H., "Tension Stiffening and Cracking of Steel Fiber-reinforced Concrete", *Journal of Materials in Civil Engineering, ASCE*, V. 15, No. 2, Apr. 2003, pp. 174-182.
- [78] ABRISHAMI H. H., and MITCHELL D., "Influence of Steel Fibers on Tension Stiffening", *ACI*

- Structural Journal, V. 94, No. 6, Nov.-Dec. 1997, pp. 769-776.
- [79] NOGHABAI K., "Behavior of Tie Elements of Plain and Fibrous Concrete Varying Cross Sections", ACI Structural Journal, V. 97, No. 2, Mar.-Apr. 2000, pp. 277-285.
- [80] ISLAM M., KHATUN S., ISLAM R. U., DOLA J. F., HUSSAN M., and SIDDIQUE A., "Finite Element Analysis of Steel Reinforced Concrete (SFRC): Validation of Experimental Shear Capacities of Beams", Elsevier, Procedia Engineering, 90, 2014, pp. 89-95.
- [81] SOLTANZADEH F., BARROS J. A. O., and SANTOS R. F. C., "High Performance Fiber Reinforced Concrete for the Shear Reinforcement: Experimental and Numerical Research", Elsevier, Construction and Building Materials, 77, 2015, pp. 94-109.
- [82] VENTURA-GOUVEIA A., "Constitutive Models for the Material Nonlinear Analysis of Concrete Structures Including Time Dependent Effects", Ph.D. Thesis, Guimarães, Portugal, University of Minho, 2011.
- [83] MIGUEL SOSA P., FERNÁNDEZ PRADA M. A., "Modelización Numérica de Estructuras de Hormigón mediante el MEF. Lección 4: Estructuras planas cargadas en su plano: lajas", departamento de Ingeniería de la Construcción, Universidad Politécnica de Valencia.
- [84] MATA FALCÓN J., "Medición fotogramétrica en el hormigón v01", UPV//ICITECH-Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón, Valencia, Nov. 2012.
- [85] AEN/CTN 83 - HORMIGÓN, AENOR., "Hormigones con fibras. Rotura por compresión.". UNE 83507 (2004), 2004.
- [86] COMITE AEN/CTN 127 - PREFABRICADOS DE CEMENTO Y DE HORMIGÓN, AENOR., "Métodos de ensayo para hormigón con fibras metálicas. Determinación de la resistencia a la tracción por flexión (límite de proporcionalidad (LOP), resistencia residual).", UNE-EN 14651 (2007), 2007.
- [87] VECCHIO F.J., and COLLINS M.P., "Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Stresses", Dept. of Civ. Engr., University of Toronto, Toronto. Rep. No. 82-03, 1982.
- [88] NAVARRO GREGORI J., "Modelización de elementos lineales de hormigón armado incluyendo el efecto del esfuerzo cortante", Tesis Doctoral, 2009, ICITECH, Universitat Politècnica de València, València, 246 pp.
- [89] STEVENS N. J., UZUMERI, S. M., COLLINS, M. P., "Reinforced Concrete Subjected to Reverse Cyclic Shear-Experiments and Constitutive Model", ACI Structural Journal, V. 88, No. 2, 1991, pp. 135-146.
- [90] BENTZ, E. C., "Section Analysis of Reinforced Concrete Members", Tesis Doctoral, 2000, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada, 183 pp.
- [91] POPOVICS, S., "A Numerical Approach to the Complete Stress-strain Curve of Concrete", Cement and Concrete Research, V. 3, No. 5, 1973, pp. 583-599.
- [92] BHIDE S., COLLINS, M. P., "Analytical Modeling of Reinforced Concrete Subjected to Monotonic and Reversed Loadings", Publication No. 87-02, 1987, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada, 308 pp.
- [93] SARGIN, M.; "Stress-strain relationships for concrete and the analysis of structural concrete section"; Waterloo University, Canada, 1971.
- [94] BHIDE S.J., and COLLINS M.P., "Reinforced Concrete Elements in Shear and Tension", Publication No. 87-02, Department of Civil Engineering, University of Toronto, 1987, 147pp.
- [95] LUBLINER J., TAYLOR R. L., AURICCHIO F., "A New Model of Generalized Plasticity and its Numerical Implementation", *International Journal of Solids and Structures*, V. 30, No. 22, 1993, pp. 3171-3184.
- [96] SARITAS A, "Mixed Formulation Frame Element for Shear Critical Steel and Reinforced

- Concrete Members", Tesis Doctoral, 2006, University of California, Berkeley, 206 pp.
- [97] LARANJEIRA, F.; AGUADO, A.; MOLINS, C.; "Constitutive equations of Fiber Reinforced concrete"; Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Tunneling (EURO: TUN 2007), Vienna, Austria, 2007.
- [98] FILIPPOU F. C., "A Matlab Toolbox for Linear and Nonlinear Structural Analysis", Report UCB/SEMM 2001/07, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2001, 33 pp.
- [99] MIGUEL SOSA P., FERNÁNDEZ PRADA M. A., "Métodos de Resolución de Sistemas de Ecuaciones No Lineales", apuntes de la asignatura: Modelización Numérica de Estructuras de Hormigón mediante el Método de los Elementos Finitos, del Máster Oficial en Ingeniería del Hormigón, Universitat Politècnica de València.

Anejo A:

Fichas ensayos

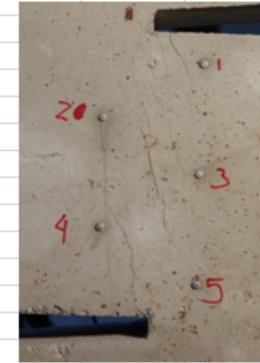
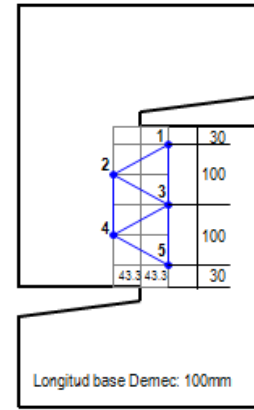
01 Probeta Z-HA-3FI8-NF-1.

# DESPLAZAMIENTOS

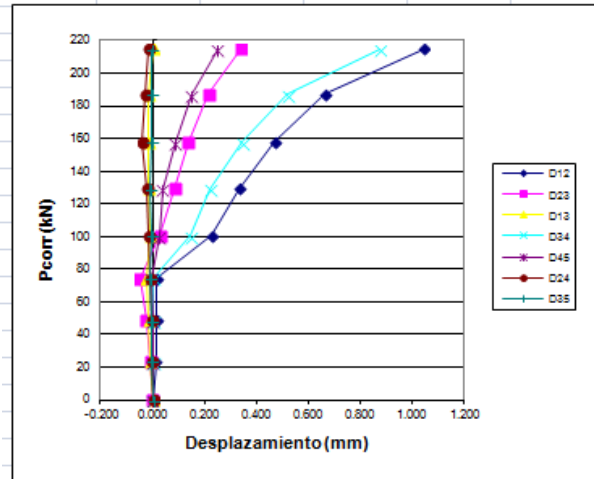
## Mediciones DEMEC

Probeta: Z-HA-3F18-NF-1  
 Fecha: 29/11/2012

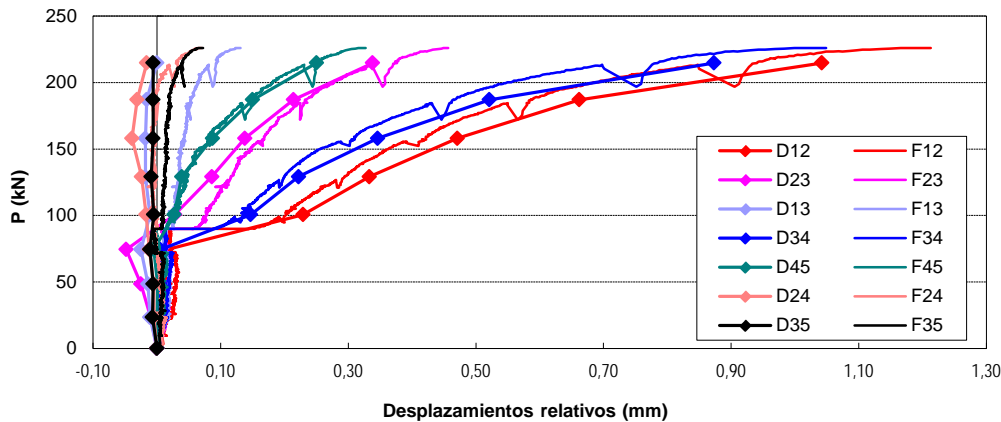
P (T)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12$ (mm)	$\Delta 23$ (mm)	$\Delta 13$ (mm)	$\Delta 34$ (mm)	$\Delta 45$ (mm)	$\Delta 24$ (mm)	$\Delta 35$ (mm)
0	0	-0.167	-0.908	-1.523	-0.844	-0.675	-1.070	-0.785
2	23.5176425	-0.155	-0.918	-1.534	-0.841	-0.675	-1.075	-0.792
4	48.40158229	-0.154	-0.933	-1.537	-0.839	-0.674	-1.075	-0.791
6	74.37598969	-0.152	-0.956	-1.548	-0.839	-0.680	-1.082	-0.796
8	100.6271932	0.062	-0.880	-1.534	-0.697	-0.648	-1.087	-0.790
10	129.1826149	0.166	-0.822	-1.541	-0.622	-0.636	-1.094	-0.794
12	157.9775994	0.304	-0.770	-1.541	-0.498	-0.588	-1.109	-0.791
14	186.988822	0.495	-0.694	-1.539	-0.323	-0.525	-1.101	-0.791
16	214.6939419	0.875	-0.570	-1.523	0.029	-0.425	-1.086	-0.791



P (kN)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12rel$ (mm)	$\Delta 23rel$ (mm)	$\Delta 13rel$ (mm)	$\Delta 34rel$ (mm)	$\Delta 45rel$ (mm)	$\Delta 24rel$ (mm)	$\Delta 35rel$ (mm)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	23.5176425	0.012	-0.010	-0.011	0.003	0.000	-0.005	-0.007
40	48.40158229	0.013	-0.025	-0.014	0.005	0.001	-0.005	-0.006
60	74.37598969	0.015	-0.048	-0.025	0.005	-0.005	-0.012	-0.011
80	100.6271932	0.229	0.028	-0.011	0.147	0.027	-0.017	-0.005
100	129.1826149	0.333	0.086	-0.018	0.222	0.039	-0.024	-0.009
120	157.9775994	0.471	0.138	-0.018	0.346	0.087	-0.039	-0.006
140	186.988822	0.662	0.214	-0.016	0.521	0.150	-0.031	-0.006
160	214.6939419	1.042	0.338	0.000	0.873	0.250	-0.016	-0.006

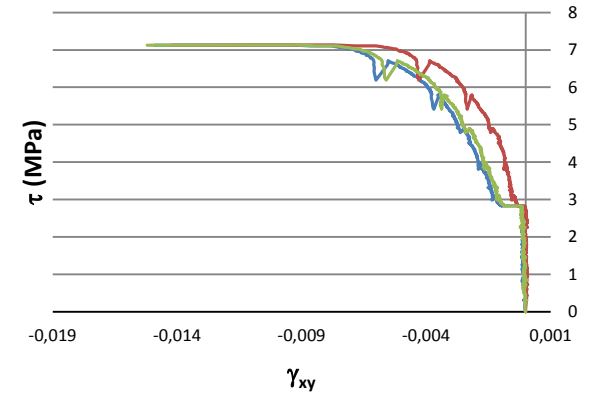
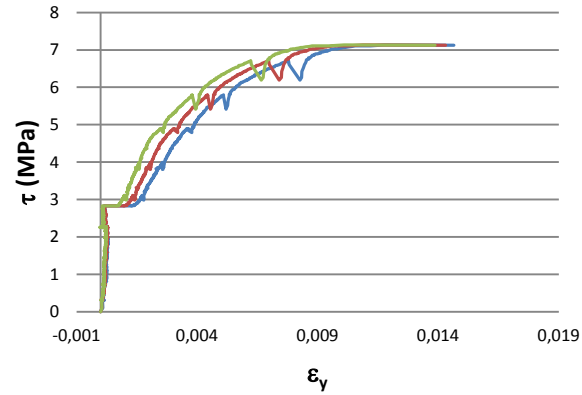
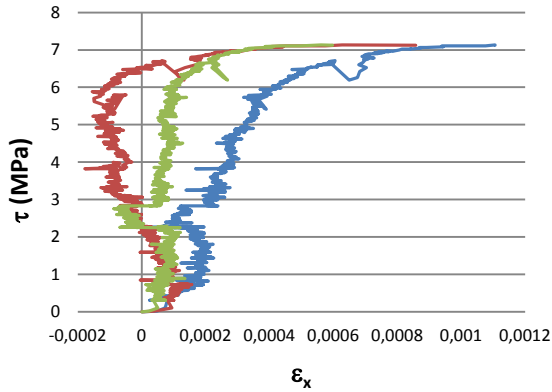


## Comparación DEMEC- Fotogrametría:



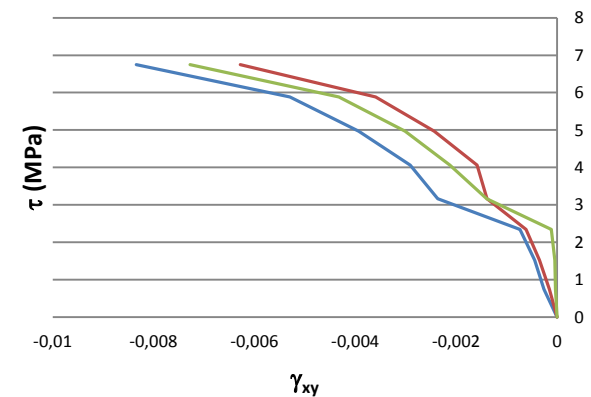
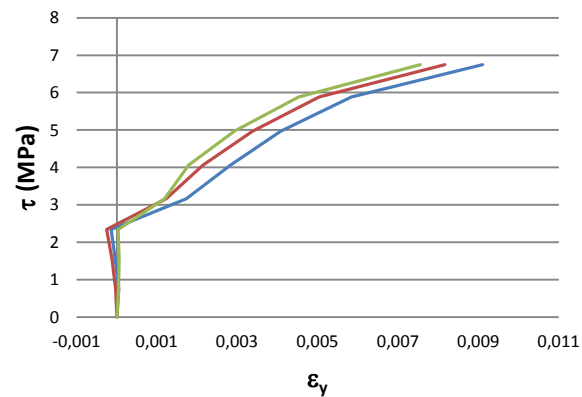
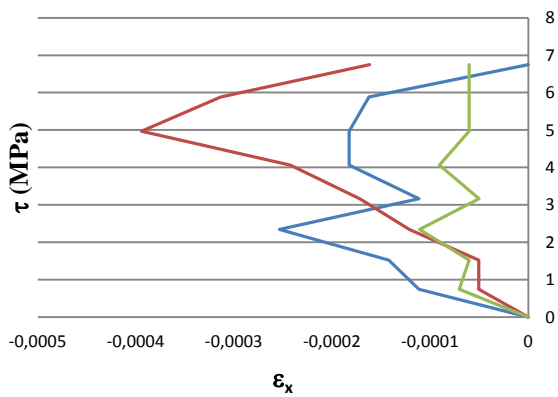
## DEFORMACIONES FOTOGRAMETRÍA

- 1º ELEMENTO
- 2º ELEMENTO
- 3º ELEMENTO



## DEFORMACIONES MEDICIONES DEMEC

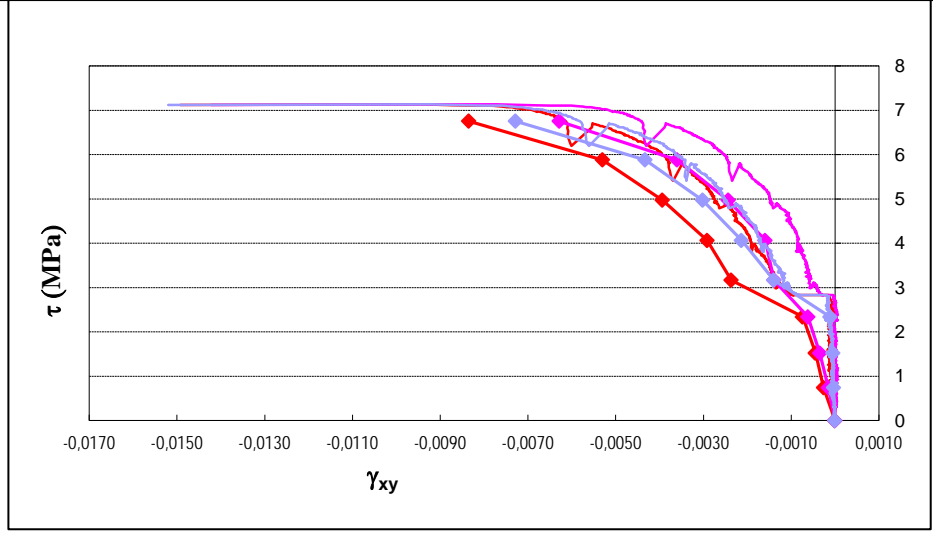
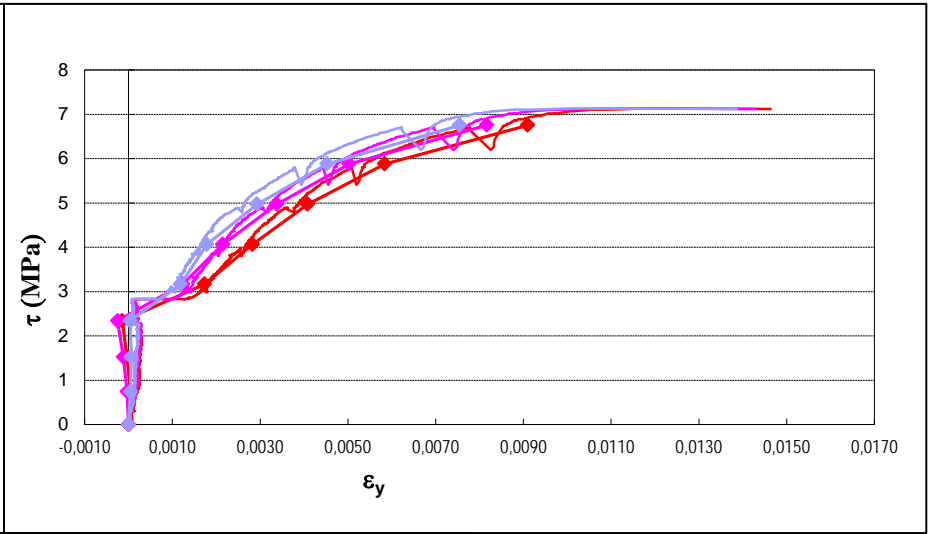
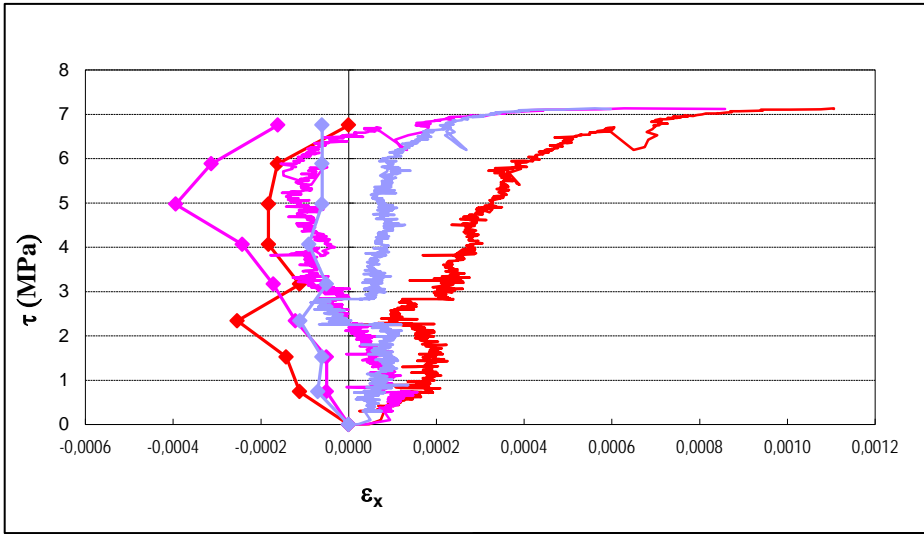
- 1º ELEMENTO
- 2º ELEMENTO
- 3º ELEMENTO



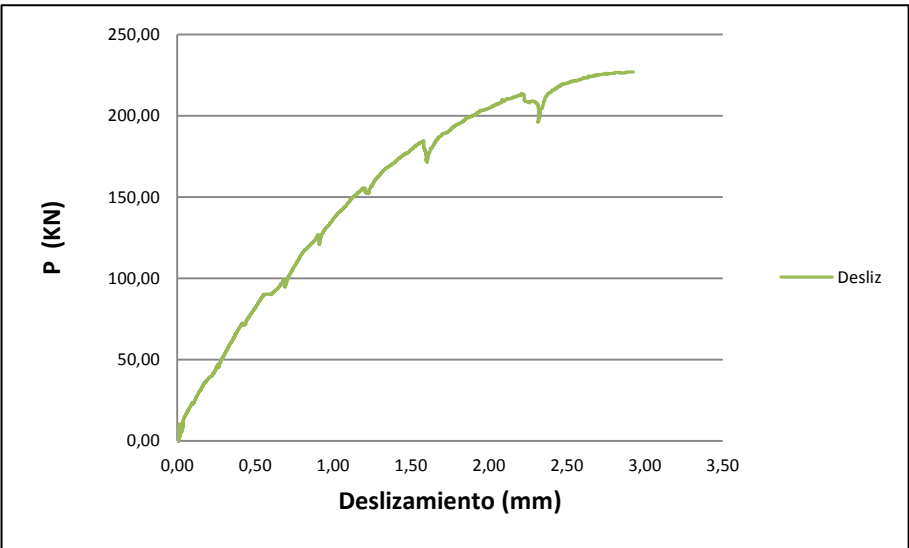
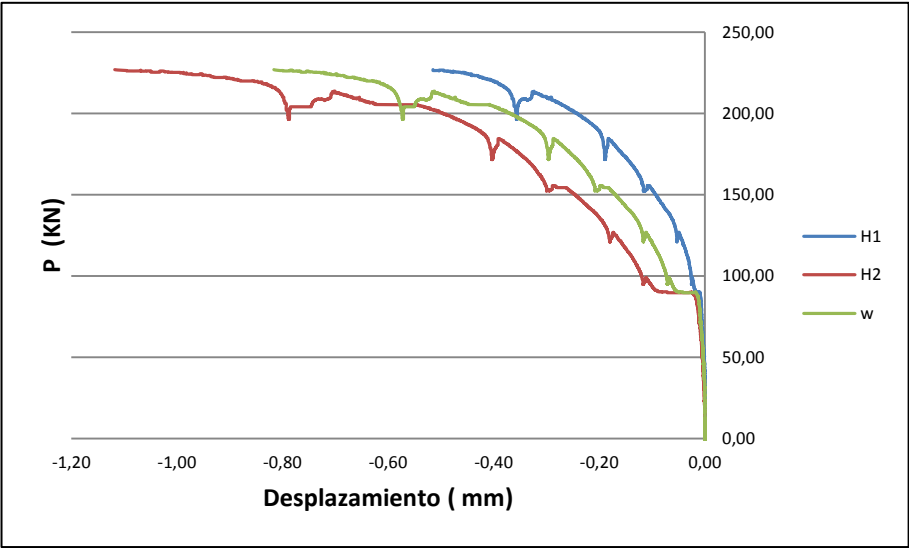
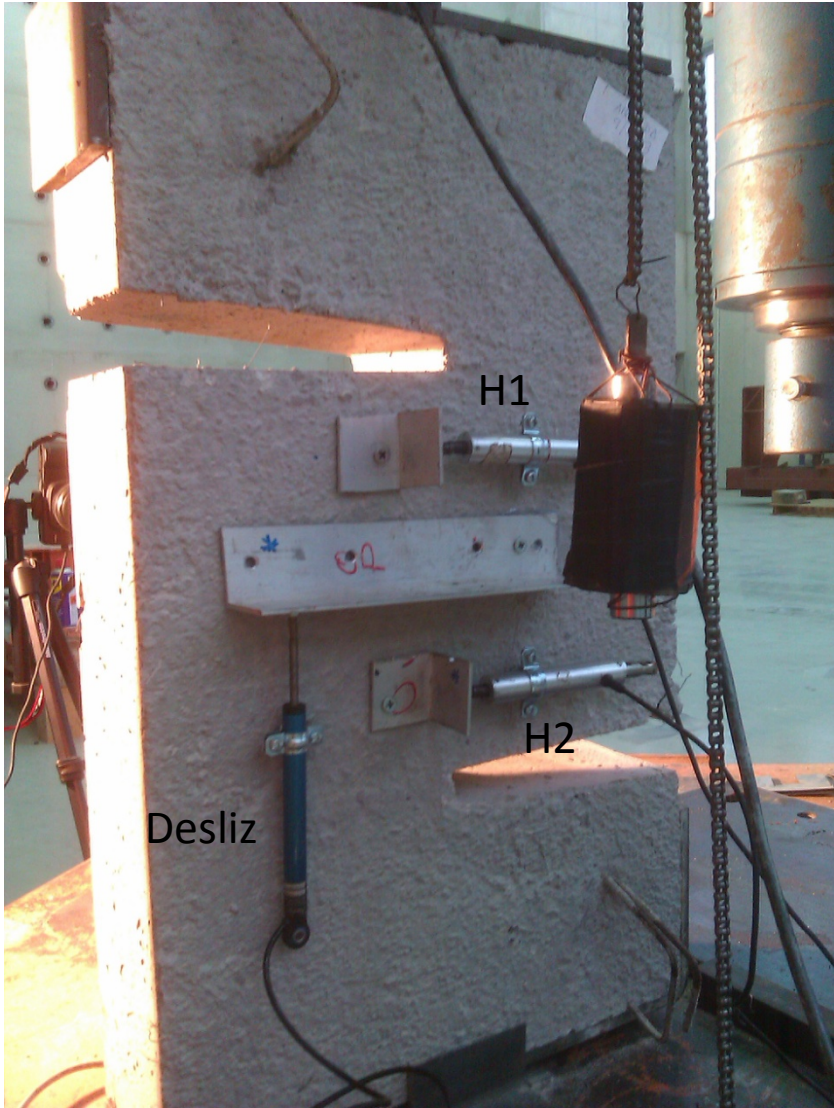


# COMPARATIVA DEFORMACIONES DEMEC - FOTO

- 1° Elemento demec
- 1° Elemento foto
- 2° Elemento demec
- 2° Elemento foto
- 3° Elemento demec
- 3° Elemento foto

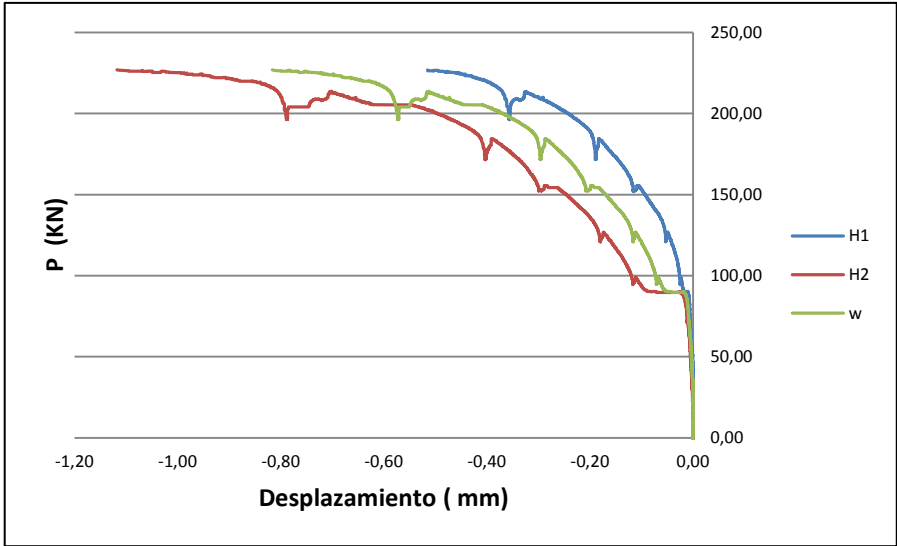


# TRANSDUCTORES: DESPLAZAMIENTOS

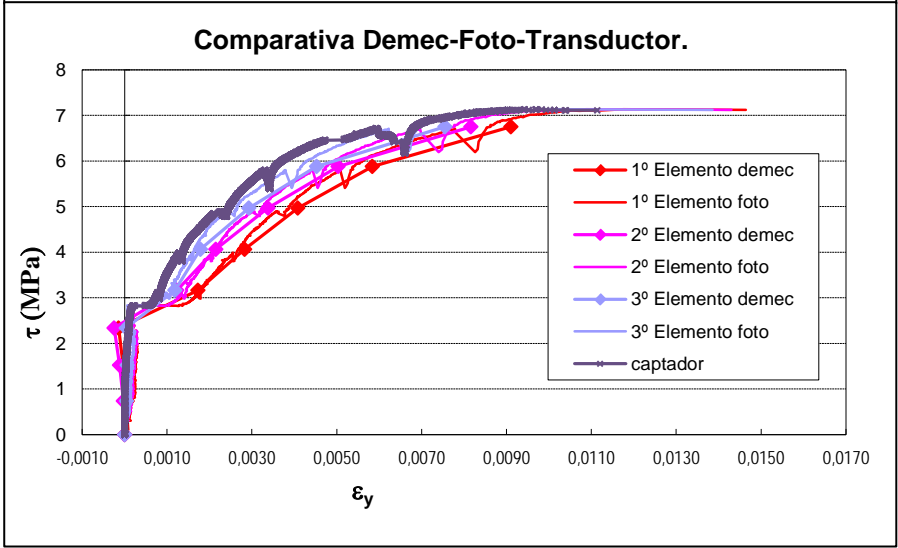
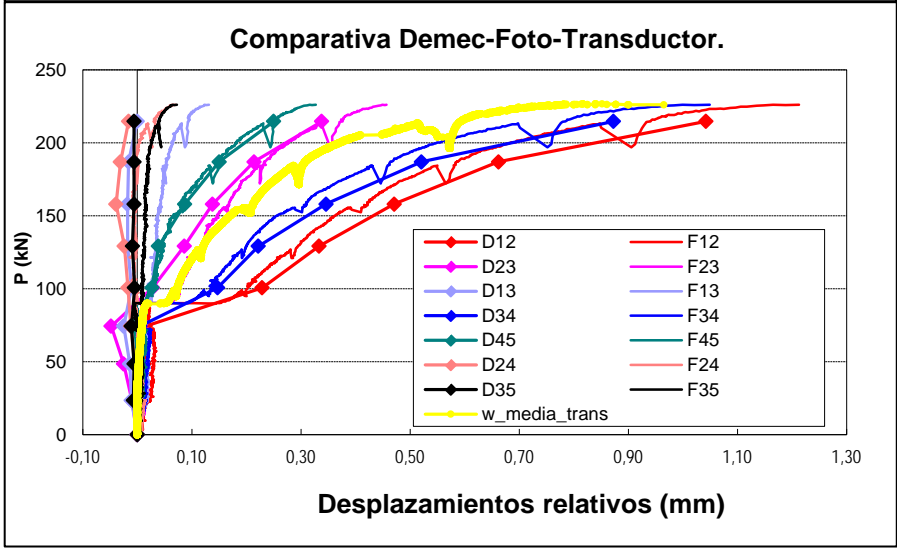
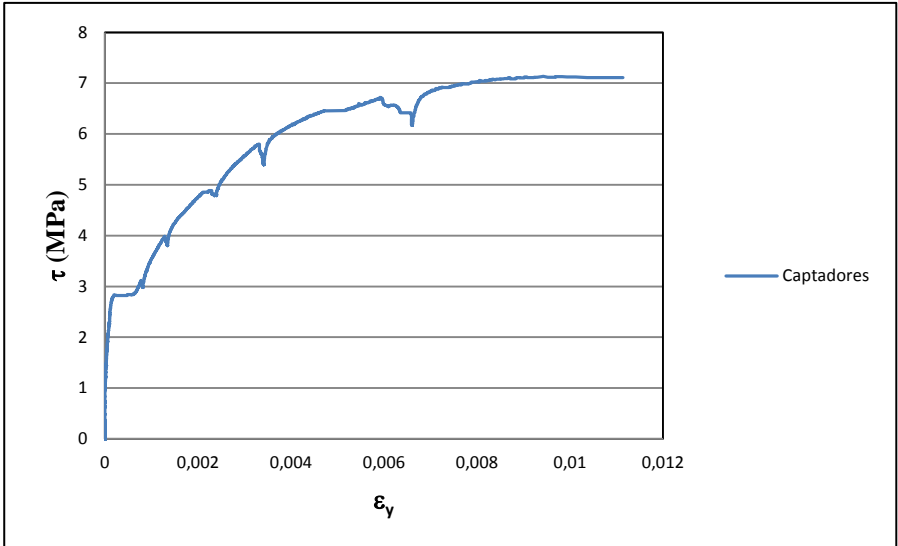


# TRANSDUCTORES

## DESPLAZAMIENTOS



## DEFORMACIONES



02 Probeta Z-HA-3FI8-NF-2.

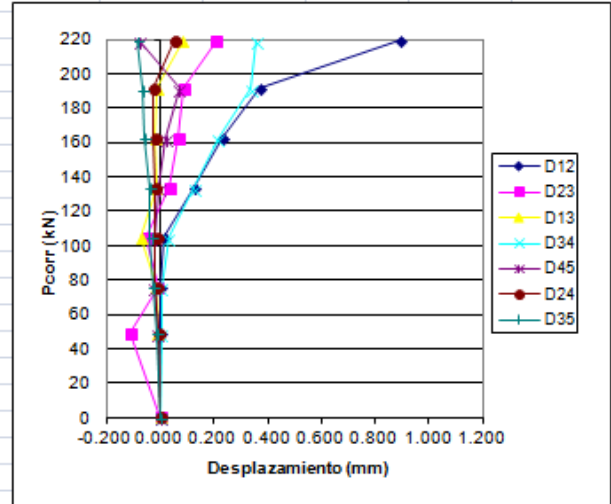
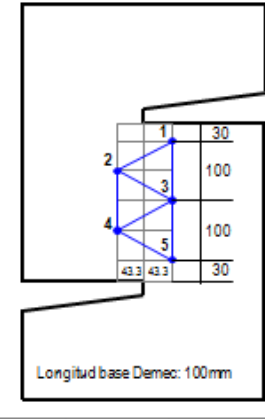
# DESPLAZAMIENTOS

## Mediciones DEMEC

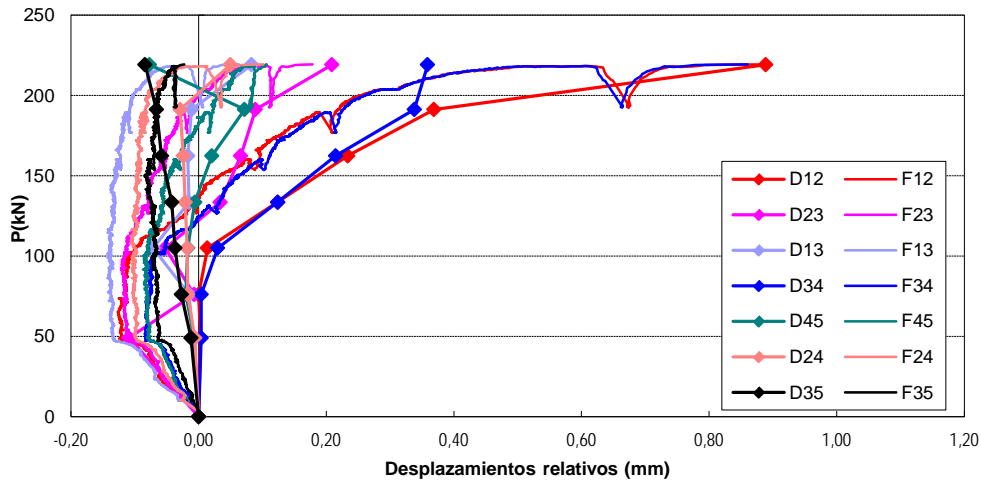
Probeta: Z-HA-3F18-NF-2  
 Fecha: 03/12/2012

P (T)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12$ (mm)	$\Delta 23$ (mm)	$\Delta 13$ (mm)	$\Delta 34$ (mm)	$\Delta 45$ (mm)	$\Delta 24$ (mm)	$\Delta 35$ (mm)
0	0	0.332	0.465	-0.473	-0.591	-0.997	-0.552	-0.897
4	49.08782428	0.335	0.356	-0.482	-0.587	-1.004	-0.558	-0.909
6	76.11831312	0.332	0.458	-0.488	-0.587	-1.017	-0.569	-0.924
8	104.9830225	0.346	0.413	-0.544	-0.561	-1.014	-0.570	-0.934
10	133.6326442	0.456	0.499	-0.488	-0.467	-1.003	-0.573	-0.939
12	162.486505	0.566	0.531	-0.490	-0.376	-0.976	-0.576	-0.955
14	191.3197364	0.701	0.554	-0.484	-0.253	-0.925	-0.581	-0.963
16	219.2159946	1.221	0.674	-0.390	-0.232	-1.074	-0.502	-0.981

P (kN)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12rel$ (mm)	$\Delta 23rel$ (mm)	$\Delta 13rel$ (mm)	$\Delta 34rel$ (mm)	$\Delta 45rel$ (mm)	$\Delta 24rel$ (mm)	$\Delta 35rel$ (mm)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
40	49.08782428	0.003	-0.109	-0.009	0.004	-0.007	-0.006	-0.012
60	76.11831312	0.000	-0.007	-0.015	0.004	-0.020	-0.017	-0.027
80	104.9830225	0.014	-0.052	-0.071	0.030	-0.017	-0.018	-0.037
100	133.6326442	0.124	0.034	-0.015	0.124	-0.006	-0.021	-0.042
120	162.486505	0.234	0.066	-0.017	0.215	0.021	-0.024	-0.058
140	191.3197364	0.369	0.089	-0.011	0.338	0.072	-0.029	-0.066
160	219.2159946	0.889	0.209	0.083	0.359	-0.077	0.050	-0.084

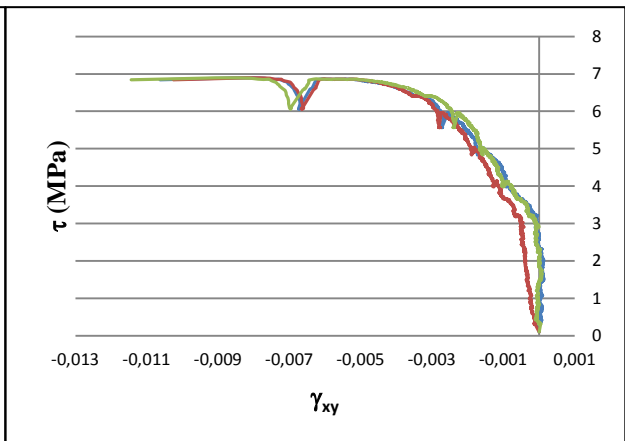
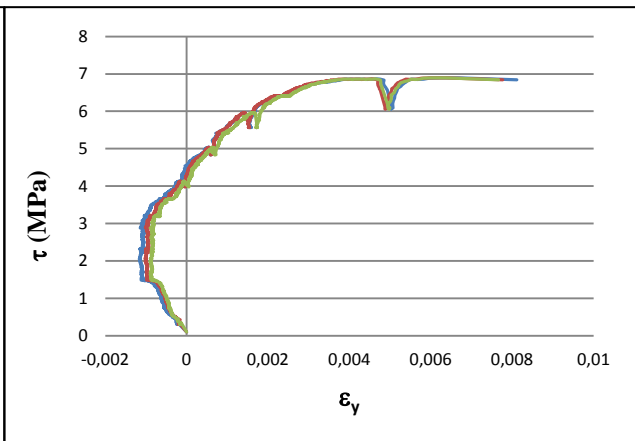
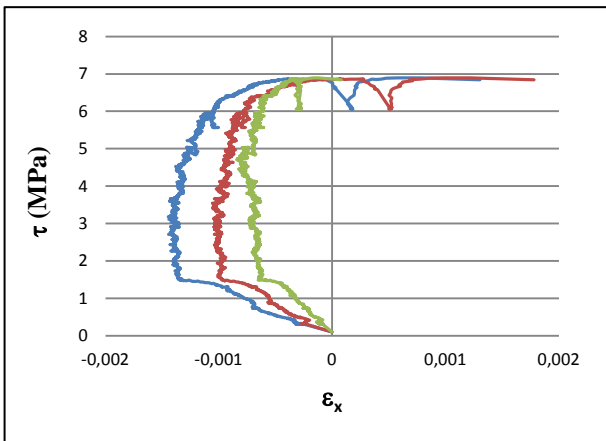


## Comparación DEMEC- Fotogrametría:



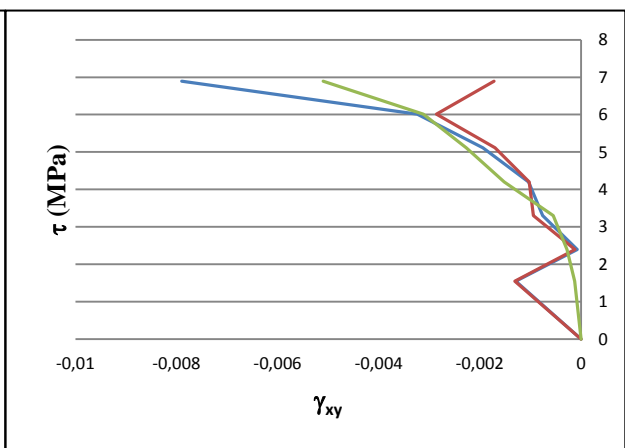
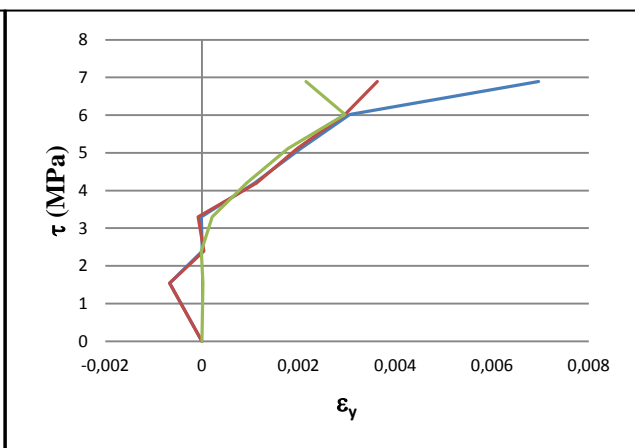
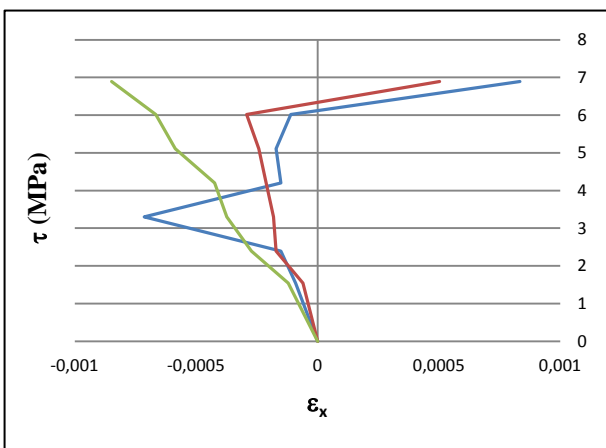
## DEFORMACIONES FOTOGRAMETRÍA

- 1º ELEMENTO
- 2º ELEMENTO
- 3º ELEMENTO



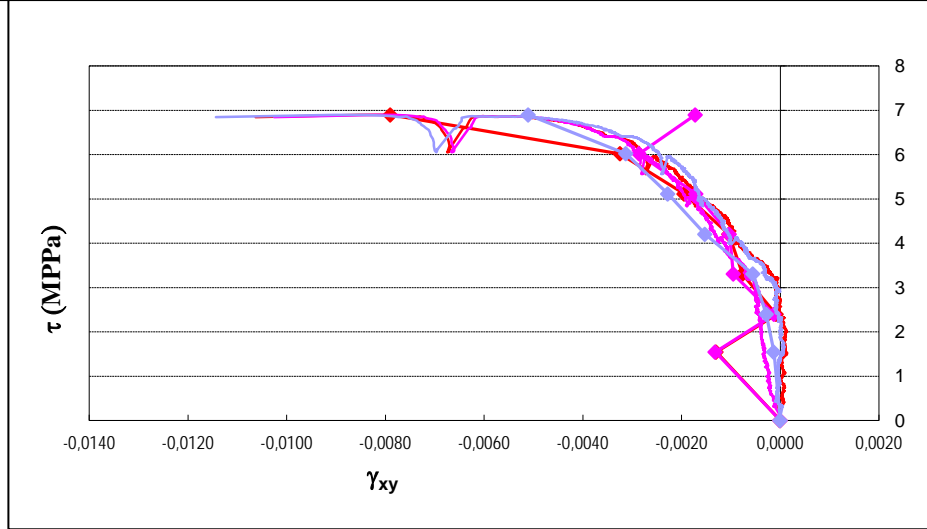
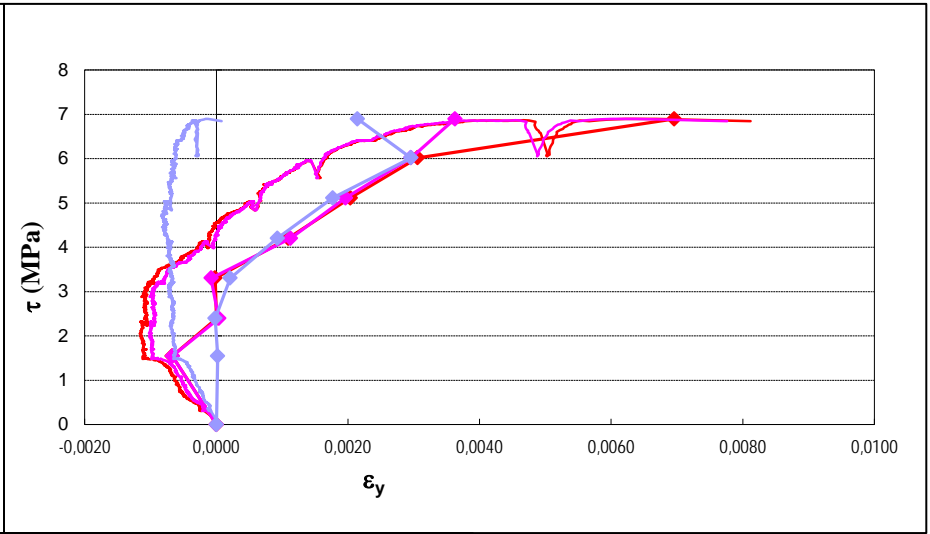
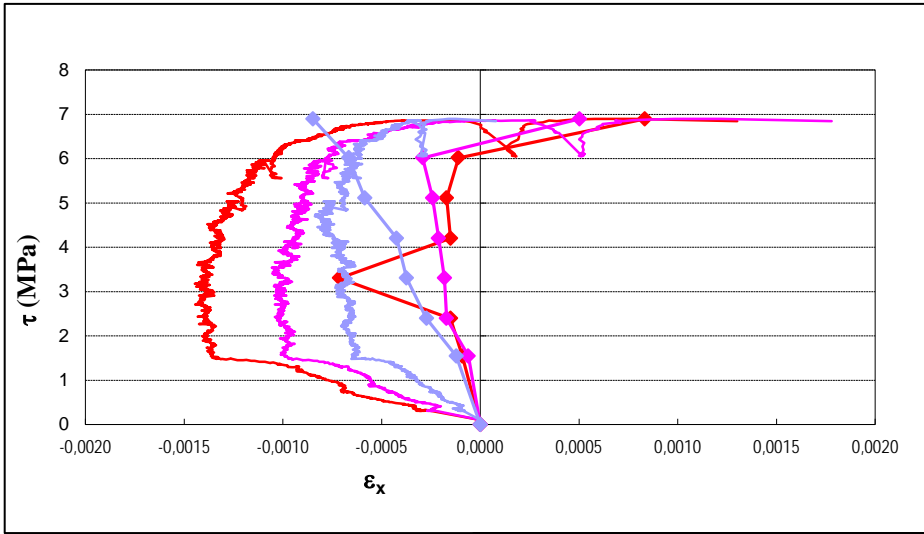
## DEFORMACIONES MEDICIONES DEMEC

- 1º ELEMENTO
- 2º ELEMENTO
- 3º ELEMENTO

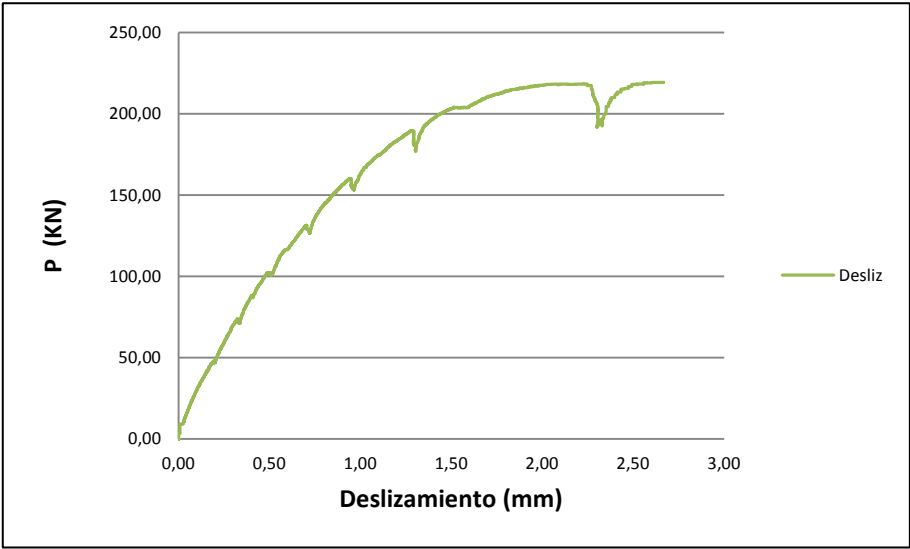
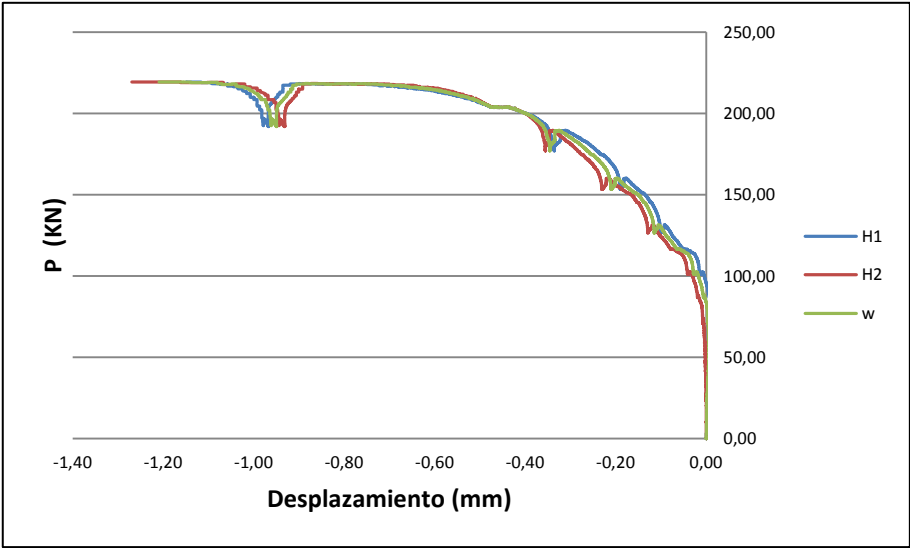
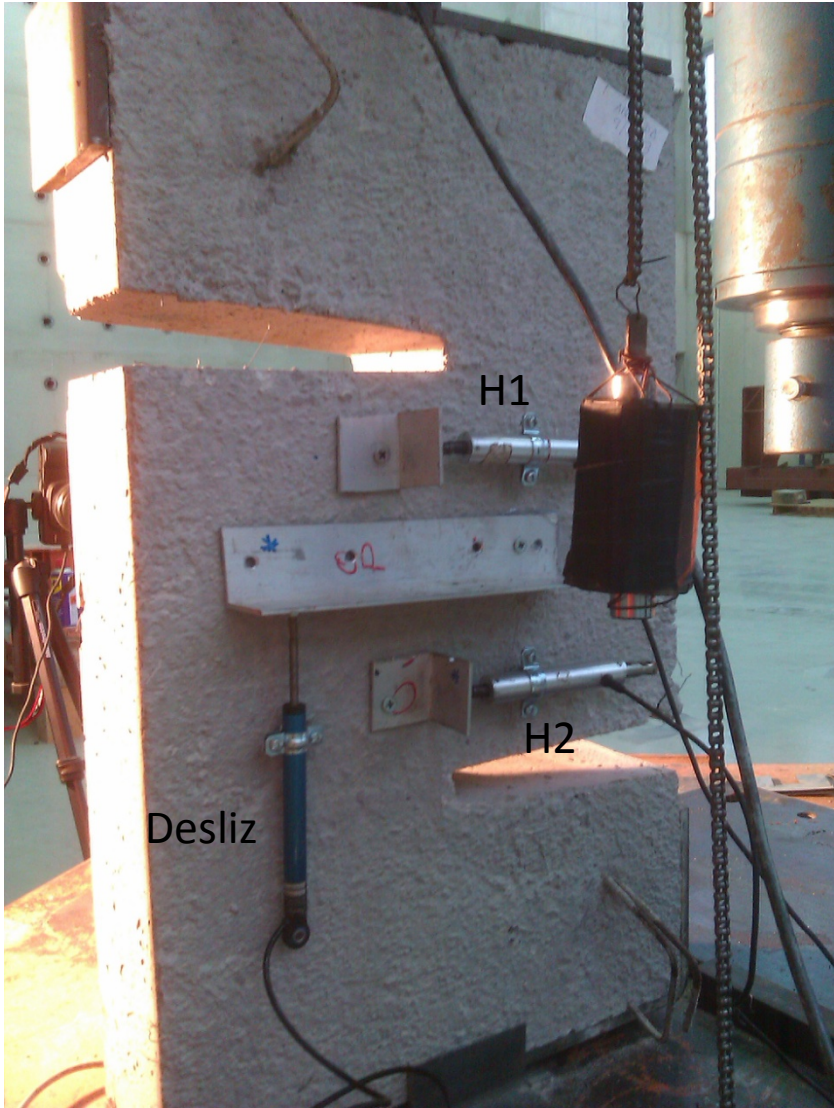


# COMPARATIVA DEFORMACIONES DEMEC - FOTO

- 1° Elemento demec
- 1° Elemento foto
- 2° Elemento demec
- 2° Elemento foto
- 3° Elemento demec
- 3° Elemento foto



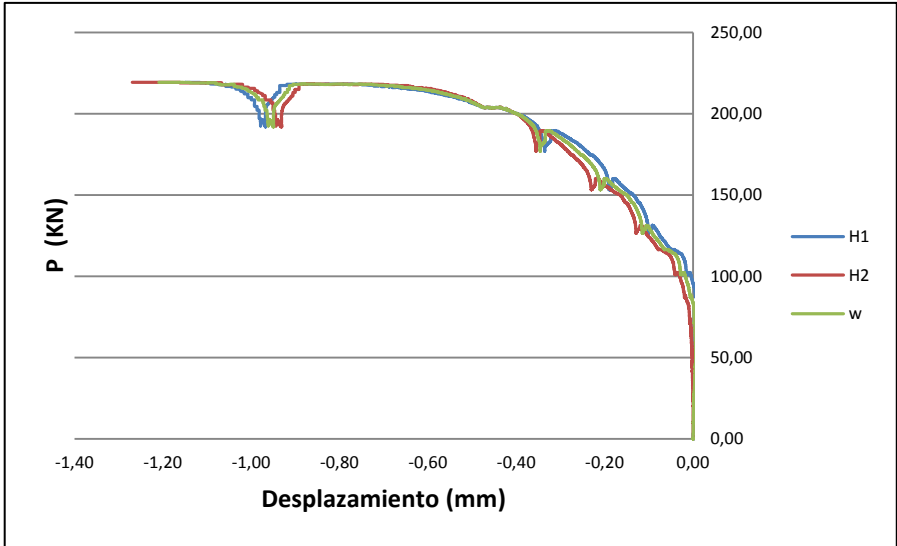
# TRANSDUCTORES: DESPLAZAMIENTOS



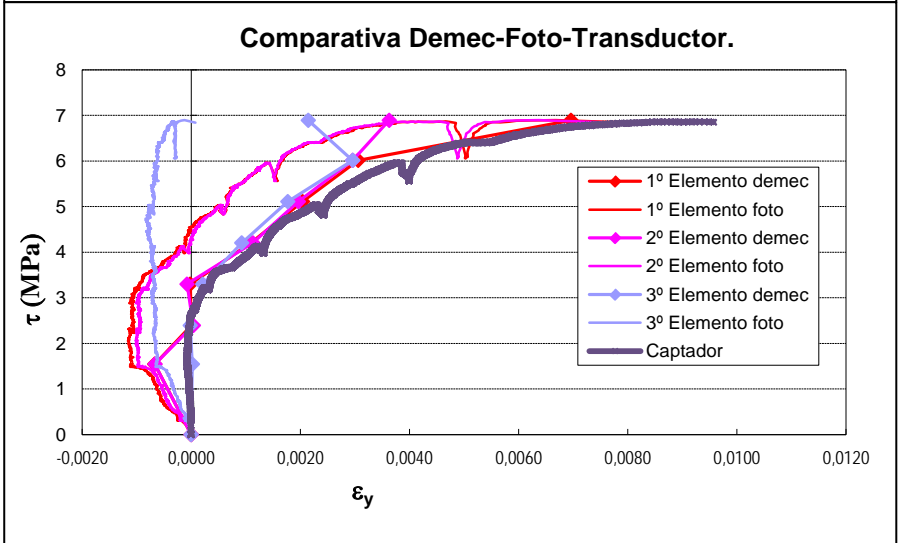
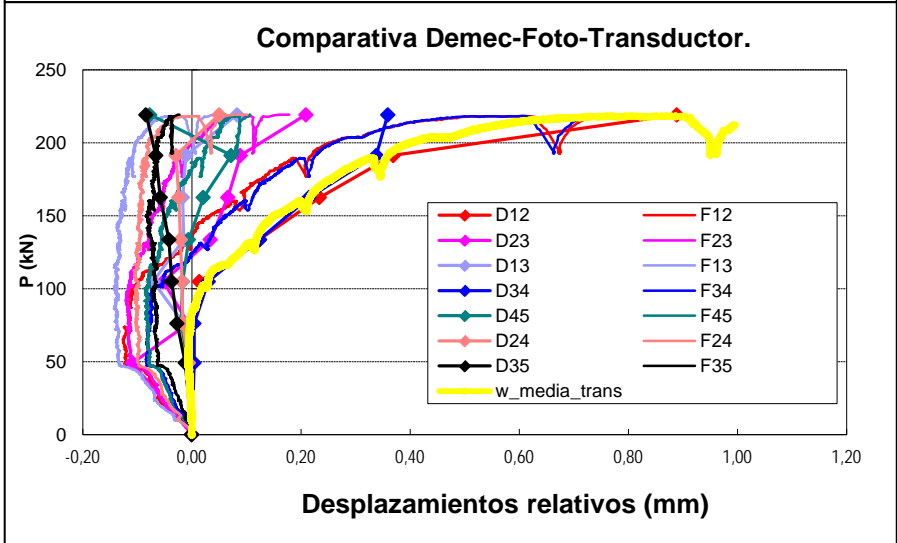
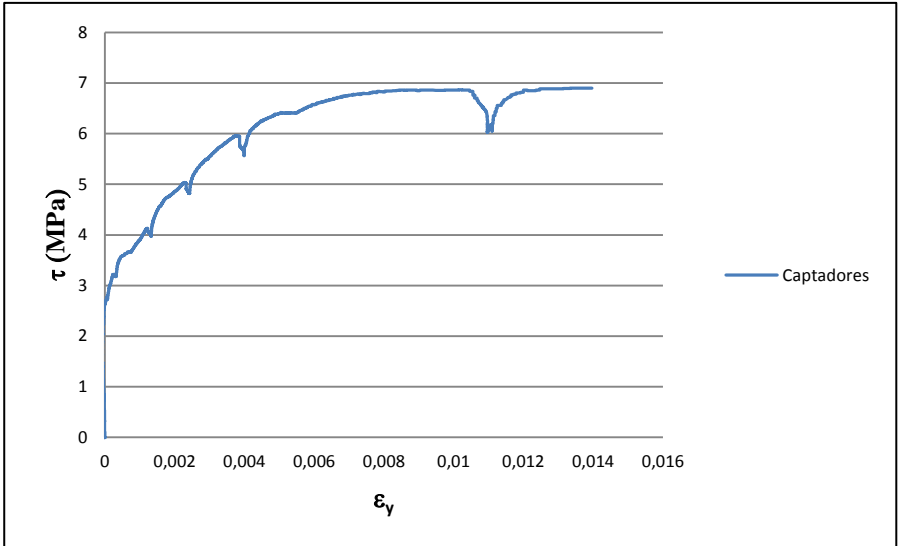


# TRANSDUCTORES

## DESPLAZAMIENTOS



## DEFORMACIONES



03 Probeta Z-HA-2FI8-NF-1.

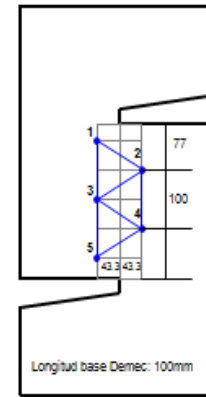
# DESPLAZAMIENTOS

## Mediciones DEMEC

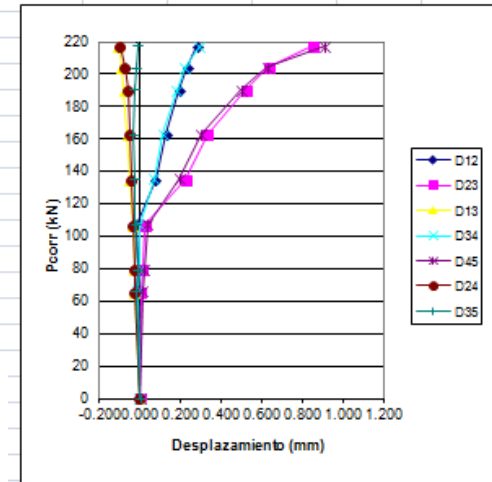
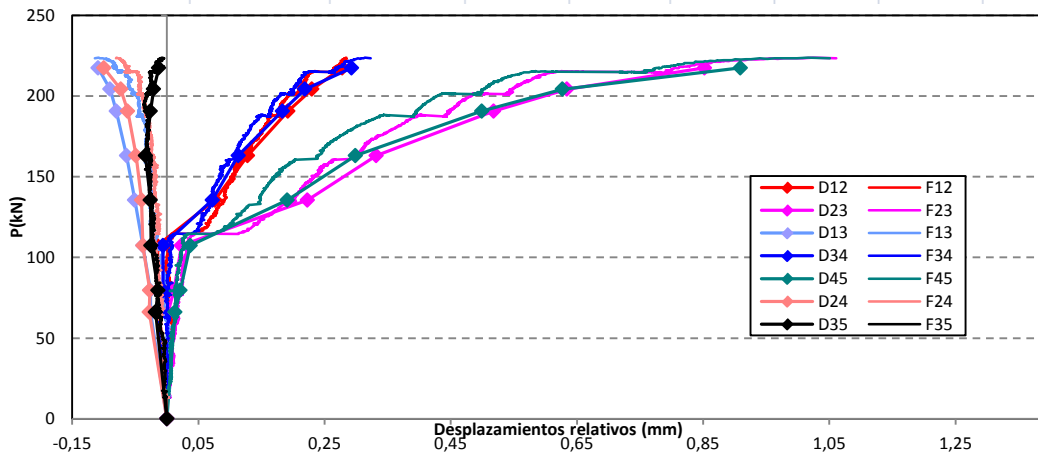
Probeta: Z-HA-2FI8-NF-1  
 Fecha: 17/12/2012

P (T)	Pcorregida (kN)	$\Delta 12$ (mm)	$\Delta 23$ (mm)	$\Delta 13$ (mm)	$\Delta 34$ (mm)	$\Delta 45$ (mm)	$\Delta 24$ (mm)	$\Delta 35$ (mm)
0	0	-0.226	0.002	-0.612	-0.044	0.838	-1.074	-1.226
5	66.12984699	-0.242	0.004	-0.638	-0.057	0.851	-1.102	-1.244
6	79.48682474	-0.240	0.013	-0.638	-0.050	0.859	-1.101	-1.240
8	107.3061561	-0.241	0.025	-0.650	-0.050	0.875	-1.112	-1.251
10	135.4478031	-0.150	0.225	-0.663	0.028	1.029	-1.114	-1.252
12	163.0204687	-0.098	0.334	-0.676	0.069	1.137	-1.123	-1.260
14	190.6078114	-0.034	0.520	-0.692	0.139	1.337	-1.136	-1.252
15	204.1424416	0.004	0.636	-0.702	0.175	1.465	-1.147	-1.247
16	217.4071745	0.052	0.854	-0.721	0.249	1.747	-1.174	-1.239

P (kN)	Pcorregida (kN)	$\Delta 12rel$ (mm)	$\Delta 23rel$ (mm)	$\Delta 13rel$ (mm)	$\Delta 34rel$ (mm)	$\Delta 45rel$ (mm)	$\Delta 24rel$ (mm)	$\Delta 35rel$ (mm)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
50	66.12984699	-0.016	0.002	-0.026	-0.013	0.013	-0.028	-0.018
60	79.48682474	-0.014	0.011	-0.026	-0.006	0.021	-0.027	-0.014
80	107.3061561	-0.015	0.023	-0.038	-0.006	0.037	-0.038	-0.025
100	135.4478031	0.076	0.223	-0.051	0.072	0.191	-0.040	-0.026
120	163.0204687	0.128	0.332	-0.064	0.113	0.299	-0.049	-0.034
140	190.6078114	0.192	0.518	-0.080	0.183	0.499	-0.062	-0.026
150	204.1424416	0.230	0.634	-0.090	0.219	0.627	-0.073	-0.021
160	217.4071745	0.278	0.852	-0.109	0.293	0.909	-0.100	-0.013

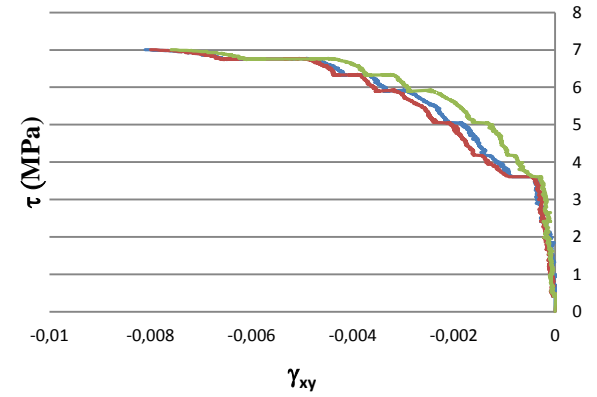
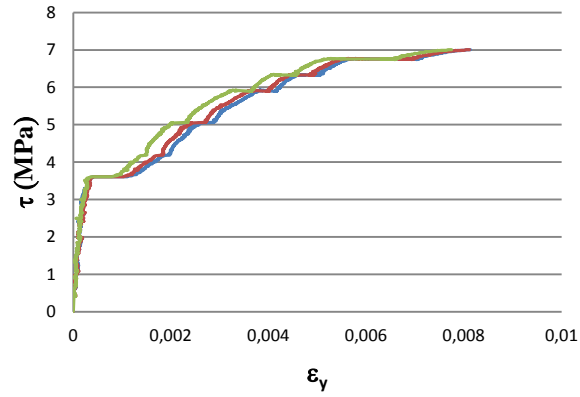
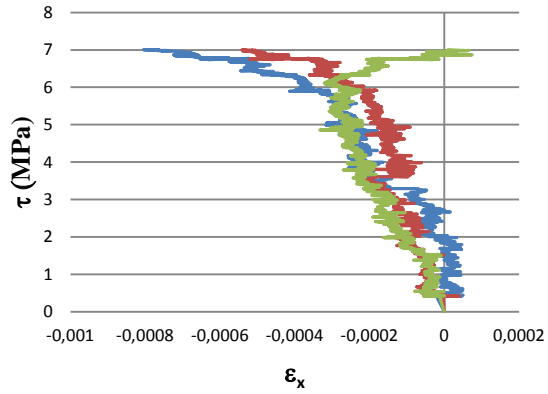


## Comparación DEMEC- Fotogrametría:



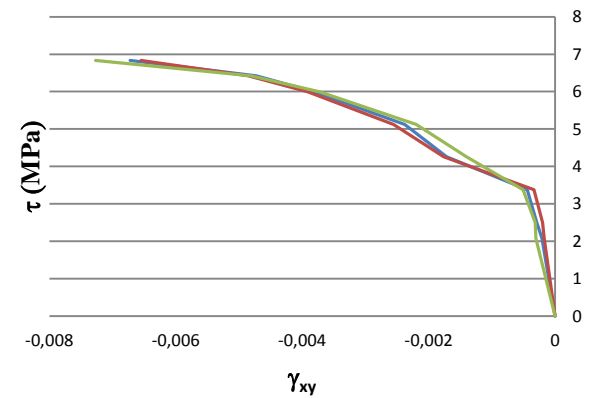
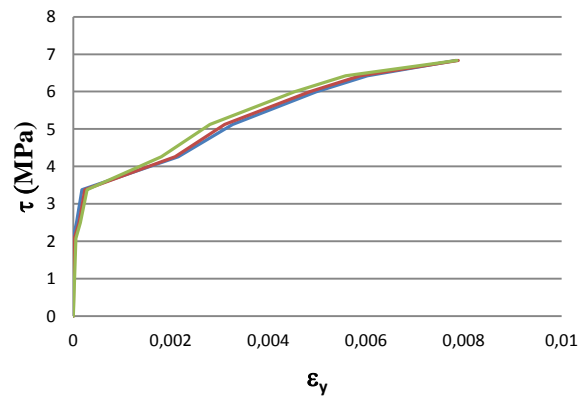
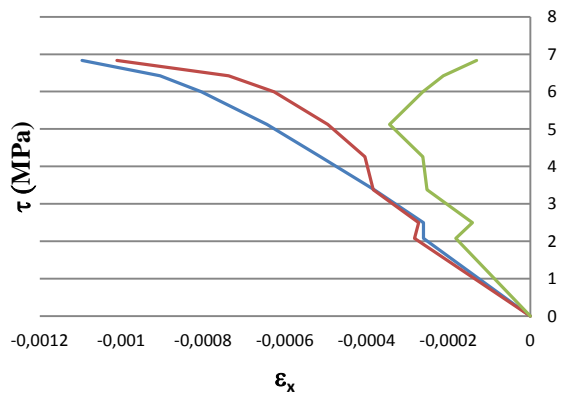
## DEFORMACIONES FOTOGRAMETRÍA

— 1º ELEMENTO  
— 2º ELEMENTO  
— 3º ELEMENTO



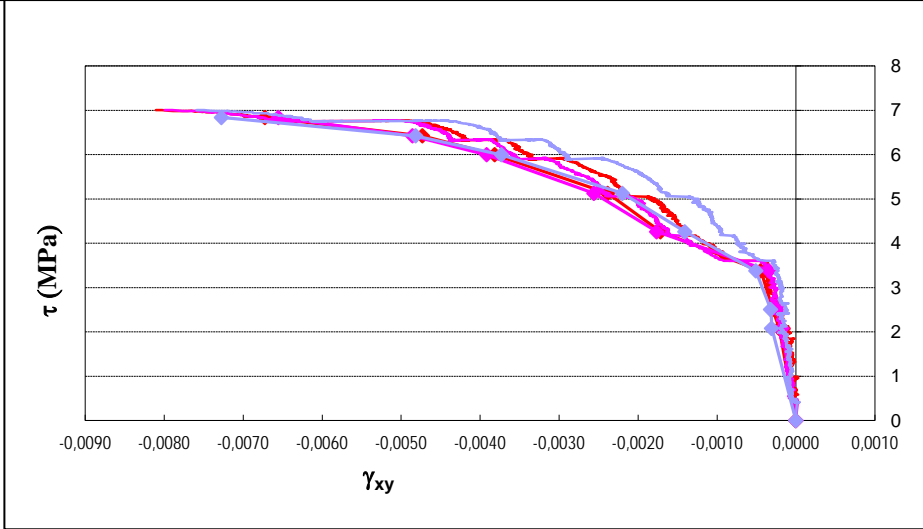
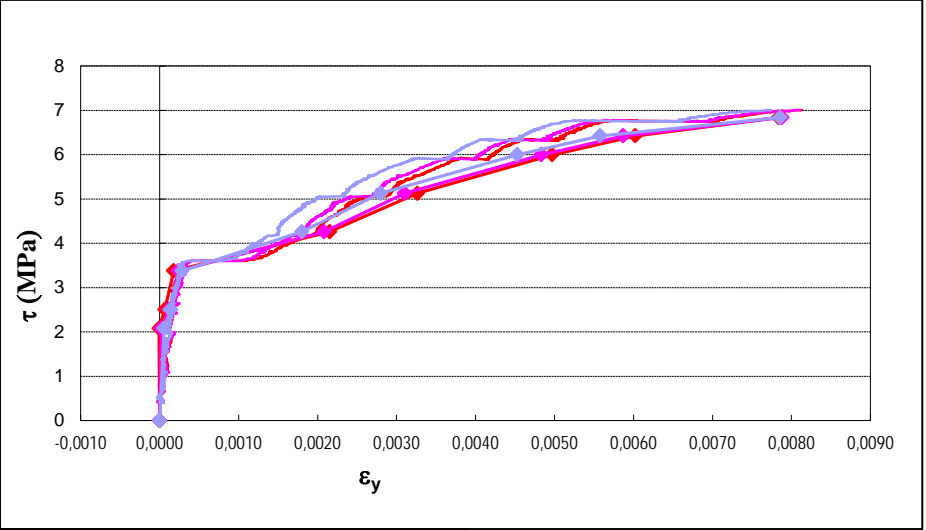
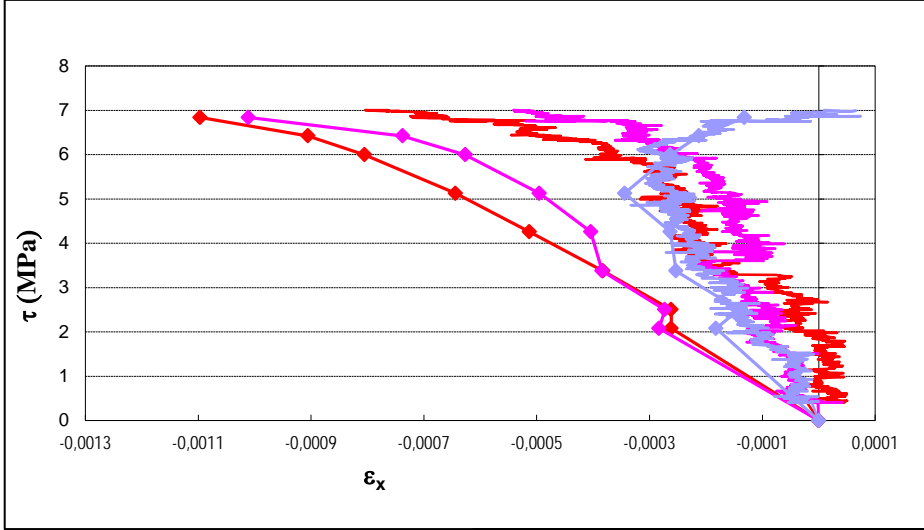
## DEFORMACIONES MEDICIONES DEMEC

— 1º ELEMENTO  
— 2º ELEMENTO  
— 3º ELEMENTO

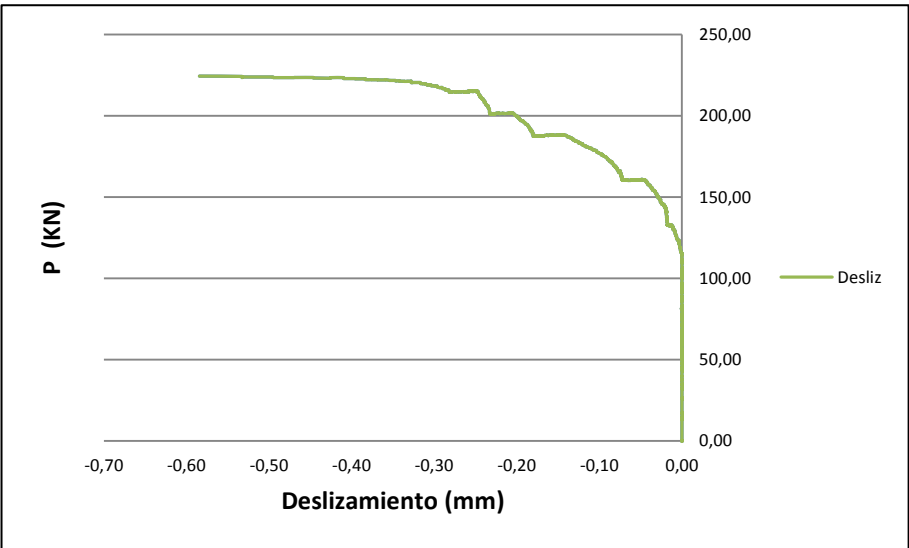
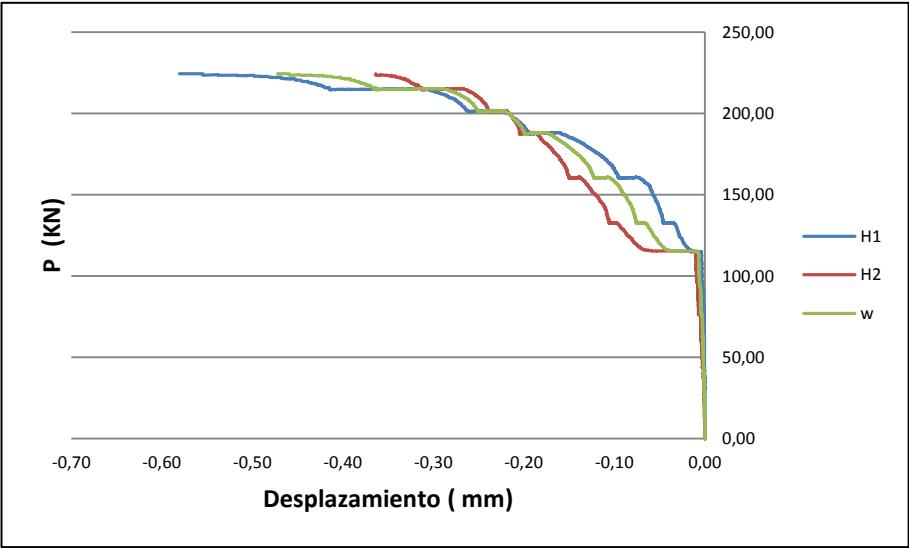
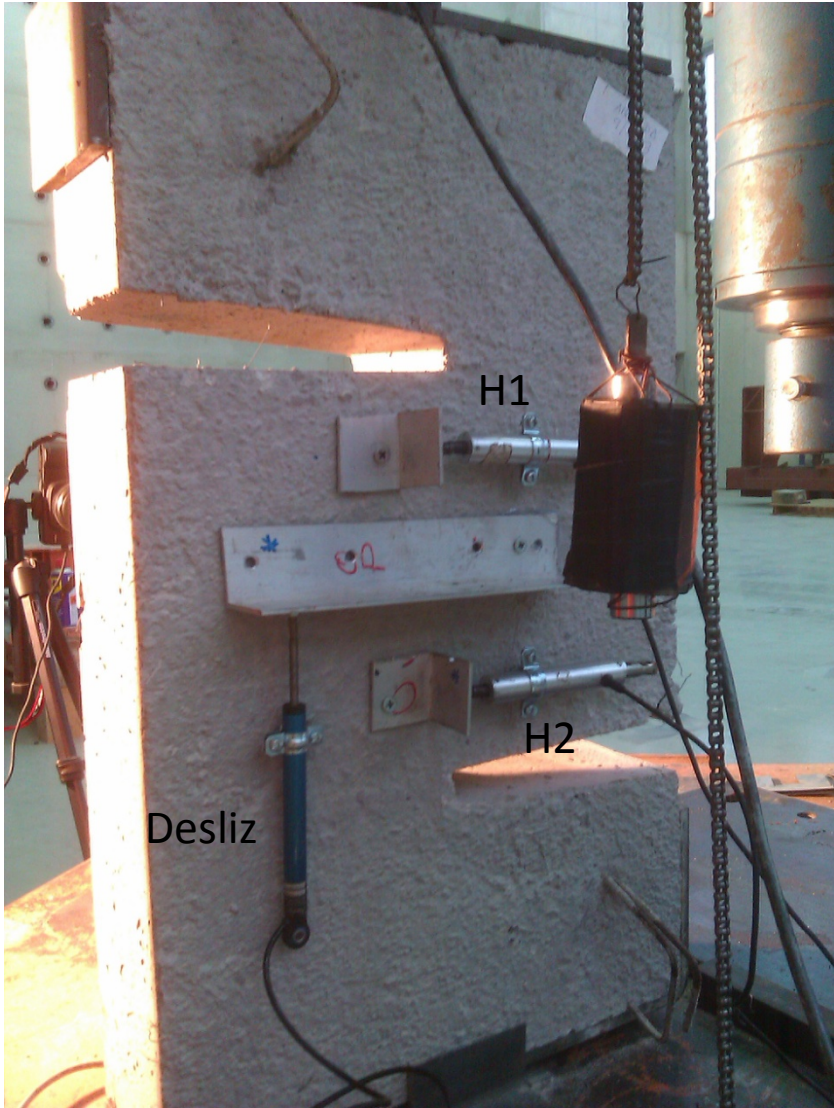


# COMPARATIVA DEFORMACIONES DEMEC - FOTO

- 1° Elemento demec
- 1° Elemento foto
- 2° Elemento demec
- 2° Elemento foto
- 3° Elemento demec
- 3° Elemento foto

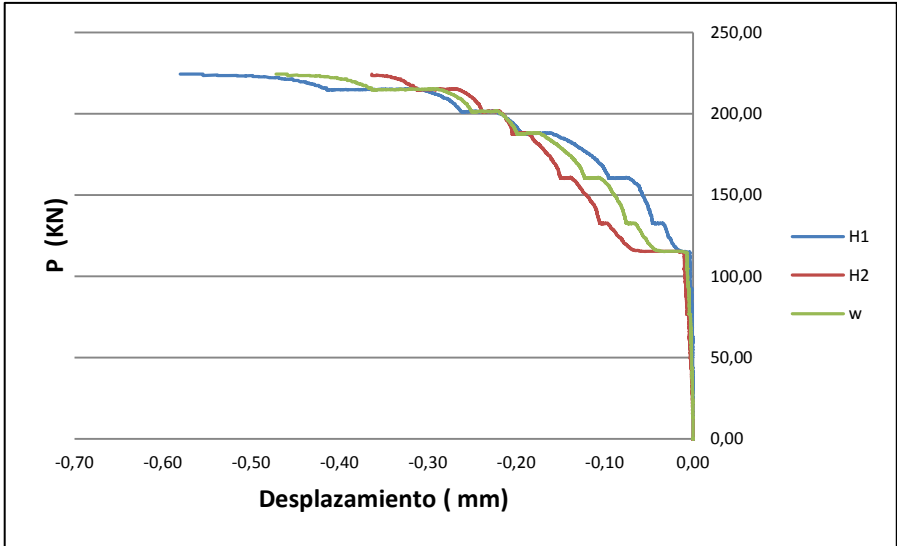


# TRANSDUCTORES: DESPLAZAMIENTOS

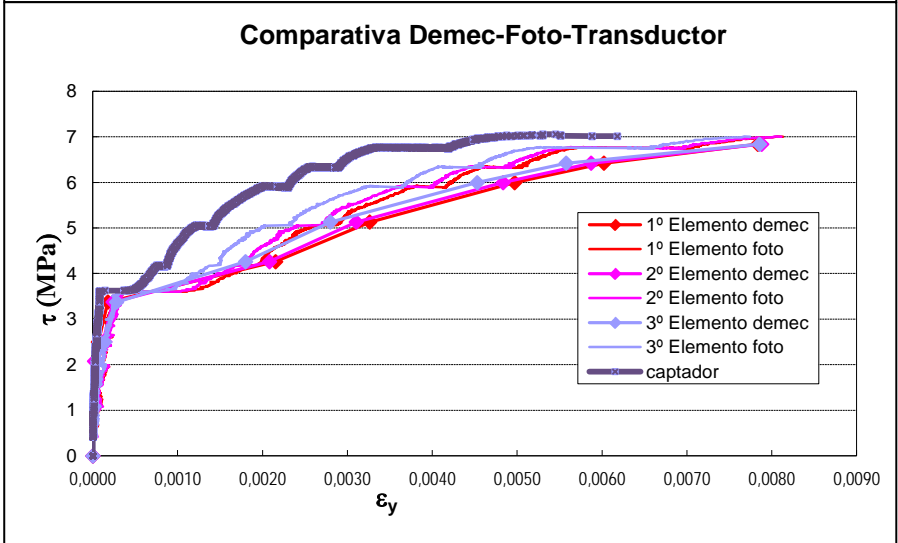
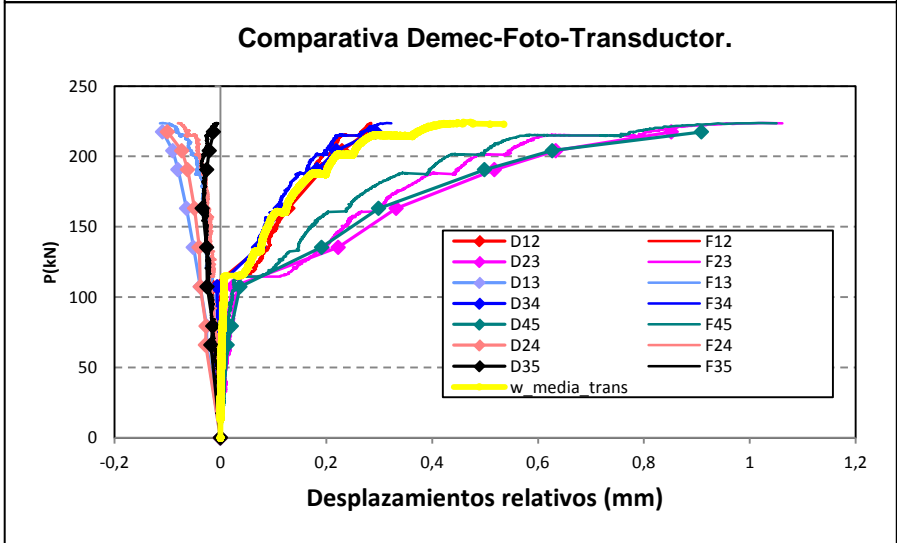
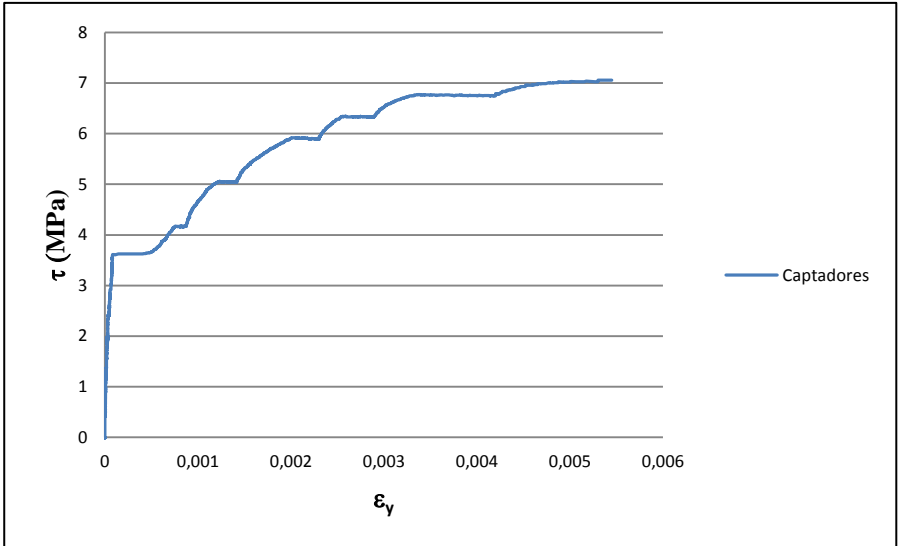


# TRANSDUCTORES

## DESPLAZAMIENTOS



## DEFORMACIONES



04 Probeta Z-HA-2FI8-NF-2.



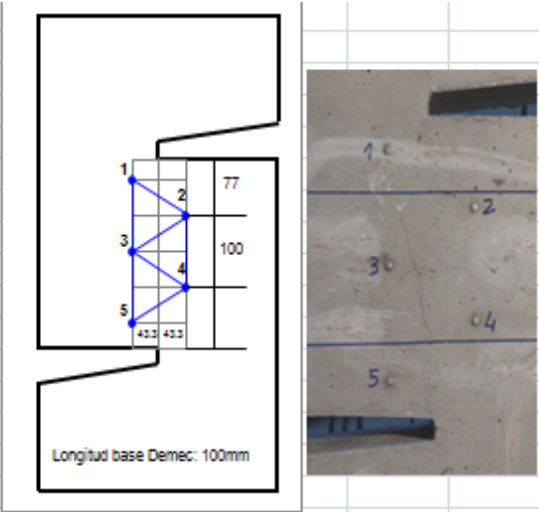
# DESPLAZAMIENTOS

## Mediciones DEMEC

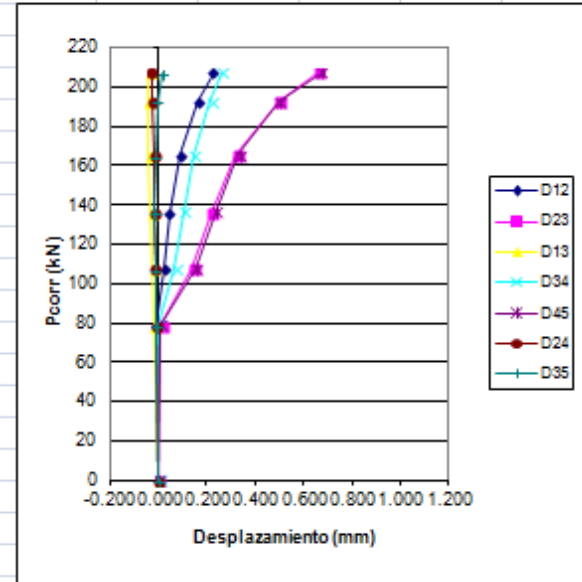
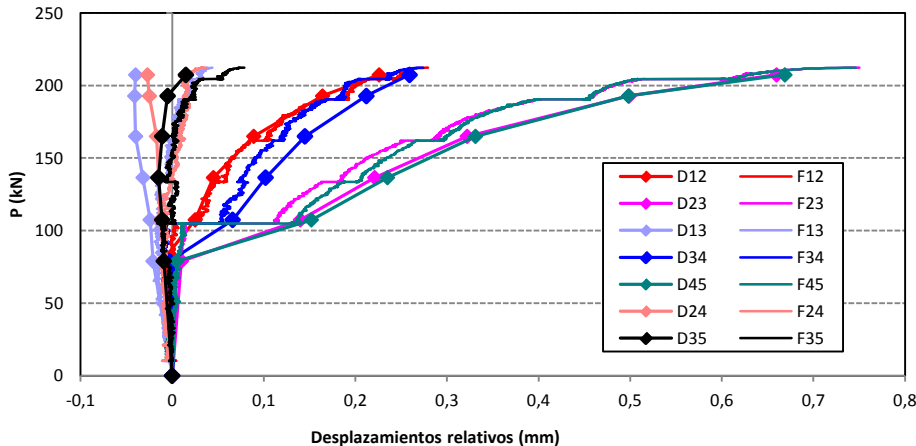
Probeta: Z-HA-2F18-NF-2  
 Fecha: 17/12/2012

P (T)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12$ (mm)	$\Delta 23$ (mm)	$\Delta 13$ (mm)	$\Delta 34$ (mm)	$\Delta 45$ (mm)	$\Delta 24$ (mm)	$\Delta 35$ (mm)
0	0	-0.702	-1.072	-1.370	-0.484	0.079	-1.717	-1.131
6	78.9641187	-0.713	-1.062	-1.391	-0.487	0.084	-1.726	-1.140
8	107.422296	-0.677	-0.932	-1.394	-0.418	0.231	-1.730	-1.142
10	136.443204	-0.657	-0.851	-1.402	-0.382	0.314	-1.732	-1.146
12	164.918945	-0.613	-0.750	-1.410	-0.339	0.410	-1.734	-1.142
14	192.743601	-0.538	-0.573	-1.411	-0.272	0.577	-1.742	-1.136
15	207.338036	-0.476	-0.412	-1.410	-0.225	0.748	-1.744	-1.116

P (kN)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12rel$ (mm)	$\Delta 23rel$ (mm)	$\Delta 13rel$ (mm)	$\Delta 34rel$ (mm)	$\Delta 45rel$ (mm)	$\Delta 24rel$ (mm)	$\Delta 35rel$ (mm)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
60	78.9641187	-0.011	0.010	-0.021	-0.003	0.005	-0.009	-0.009
80	107.422296	0.025	0.140	-0.024	0.066	0.152	-0.013	-0.011
100	136.443204	0.045	0.221	-0.032	0.102	0.235	-0.015	-0.015
120	164.918945	0.089	0.322	-0.040	0.145	0.331	-0.017	-0.011
140	192.743601	0.164	0.499	-0.041	0.212	0.498	-0.025	-0.005
150	207.338036	0.226	0.660	-0.040	0.259	0.669	-0.027	0.015

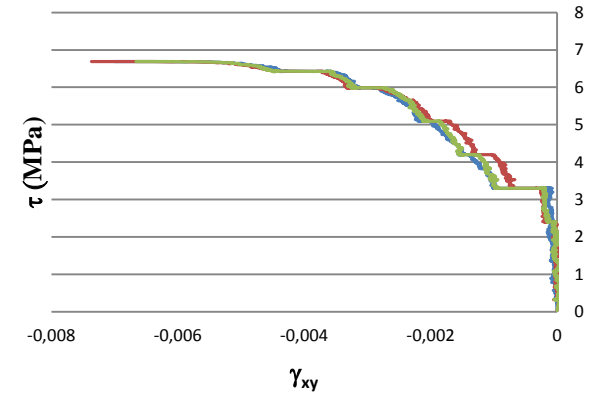
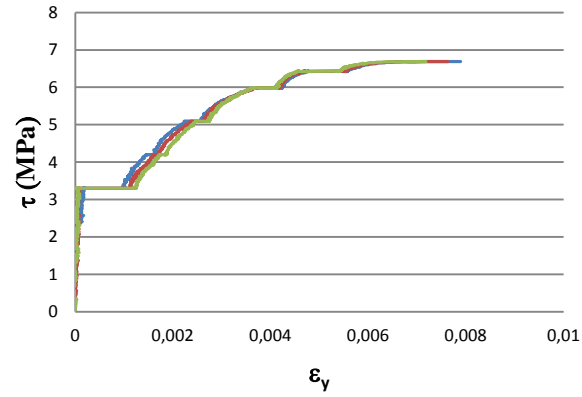
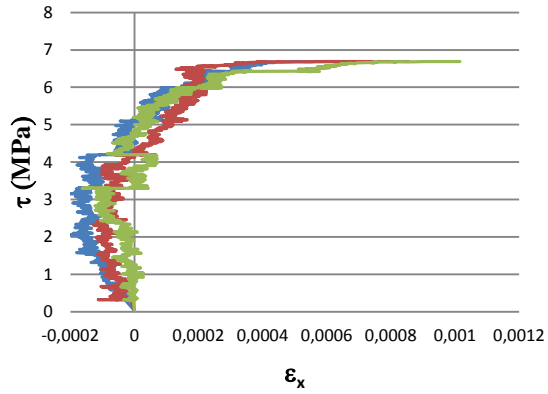


## Comparación DEMEC- Fotogrametría:



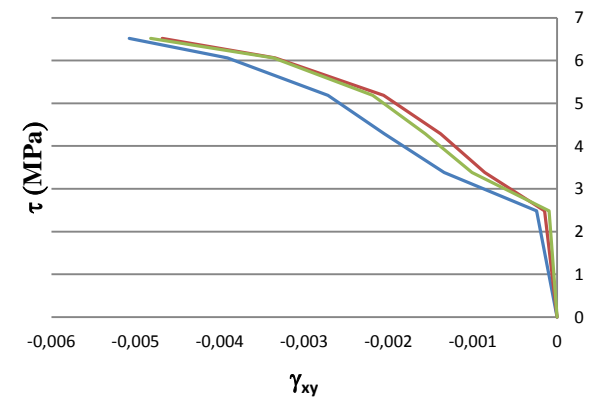
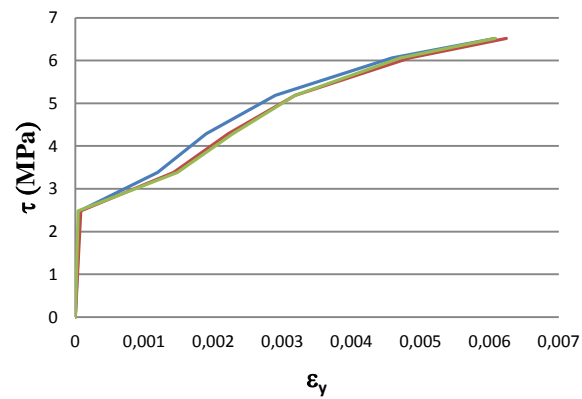
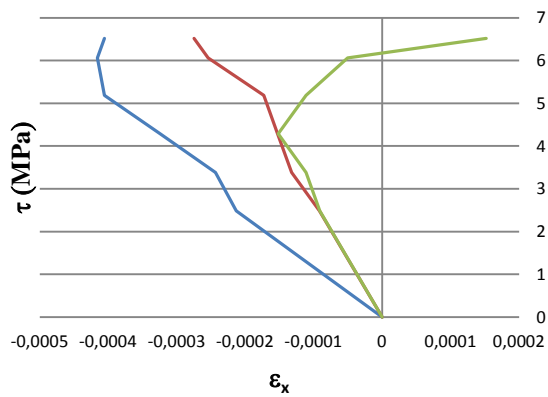
## DEFORMACIONES FOTOGRAMETRÍA

- 1º ELEMENTO
- 2º ELEMENTO
- 3º ELEMENTO



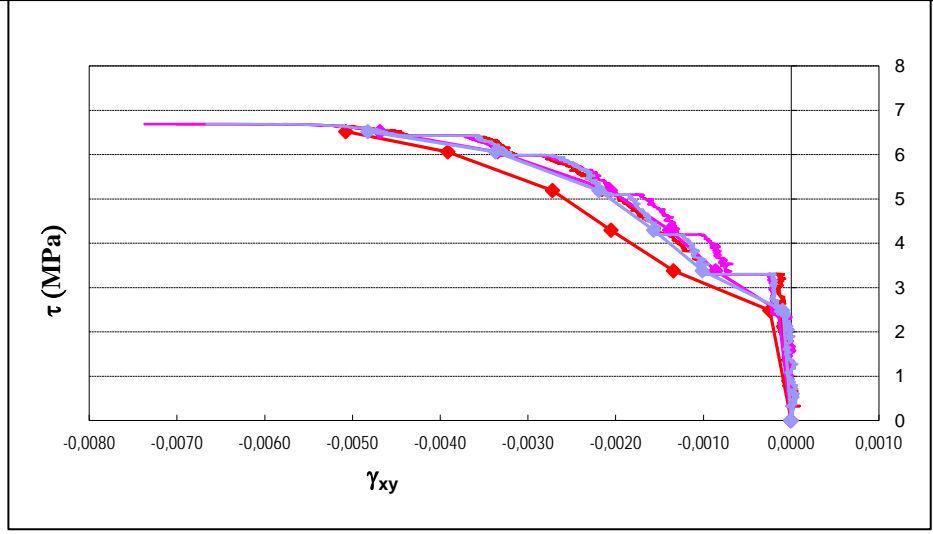
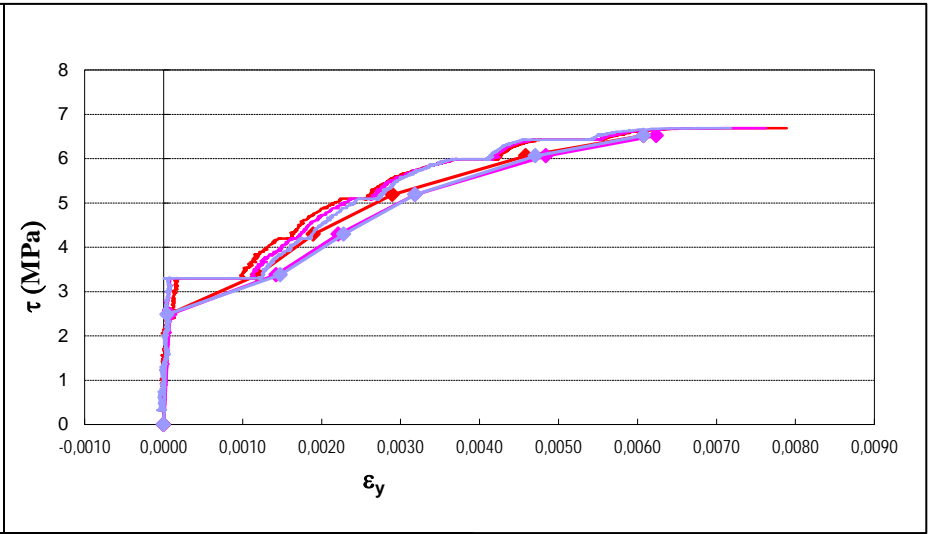
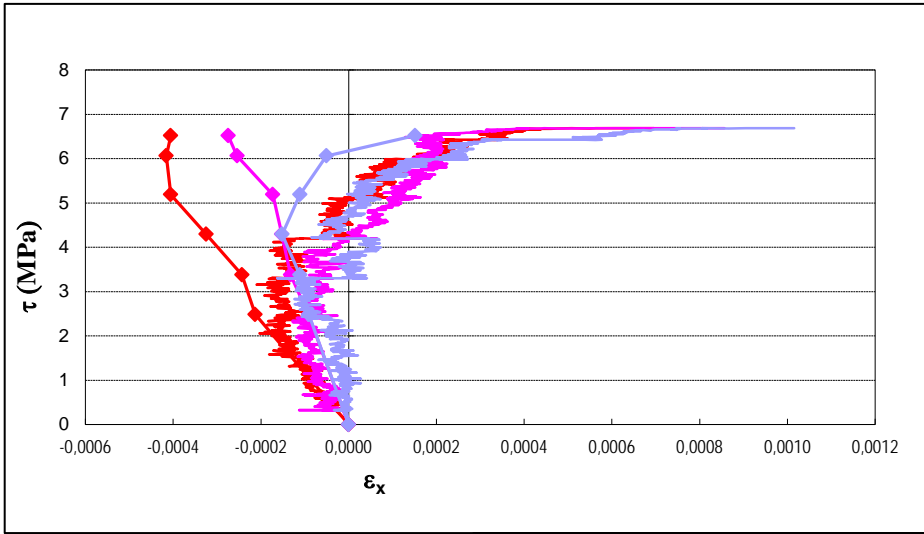
## DEFORMACIONES MEDICIONES DEMEC

- 1º ELEMENTO
- 2º ELEMENTO
- 3º ELEMENTO

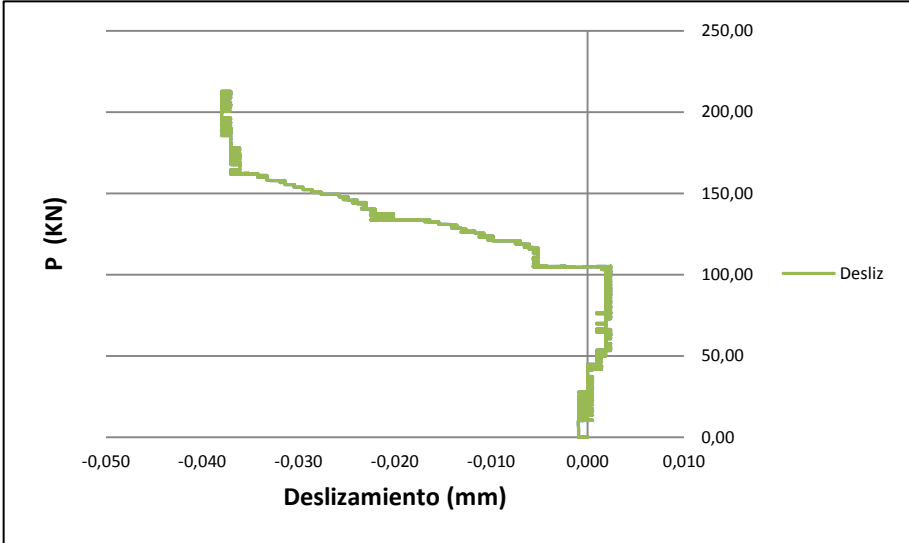
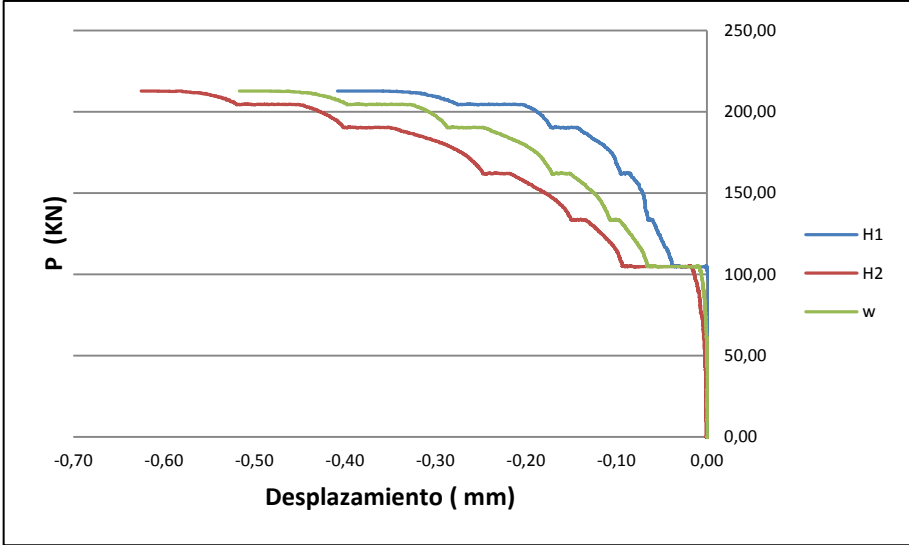
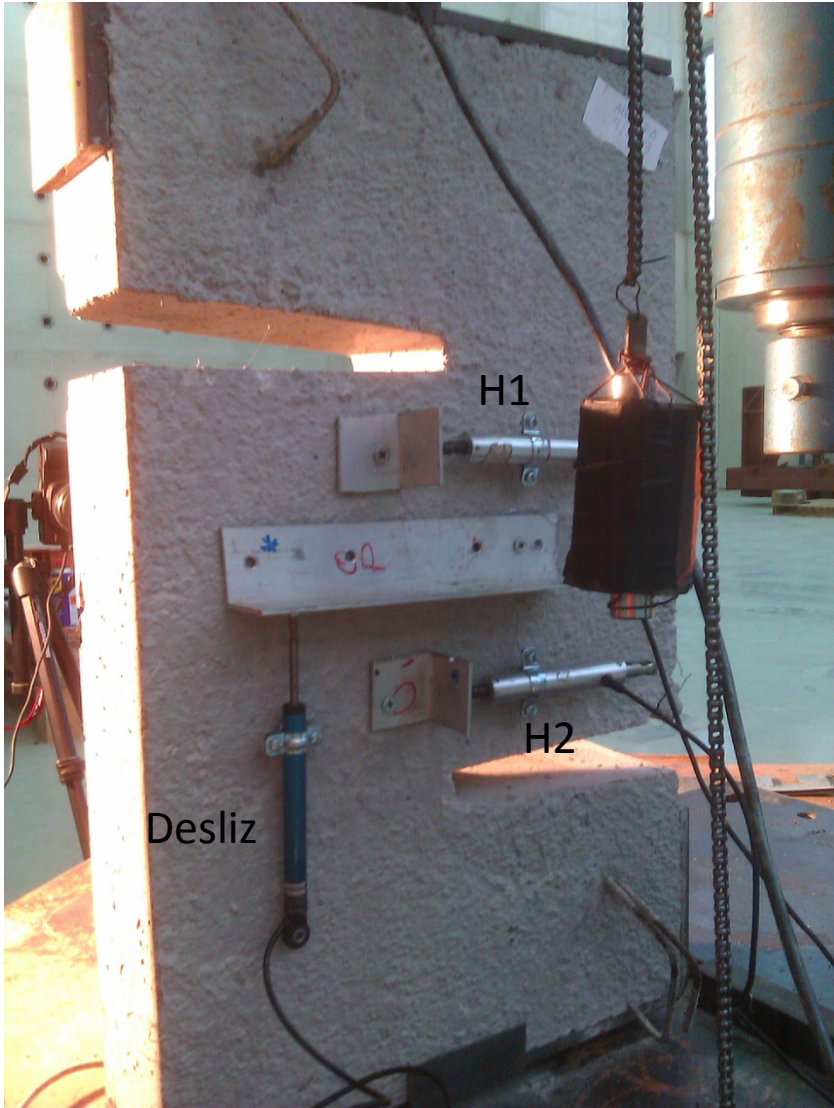


# COMPARATIVA DEFORMACIONES DEMEC - FOTO

- 1° Elemento demec
- 1° Elemento foto
- 2° Elemento demec
- 2° Elemento foto
- 3° Elemento demec
- 3° Elemento foto

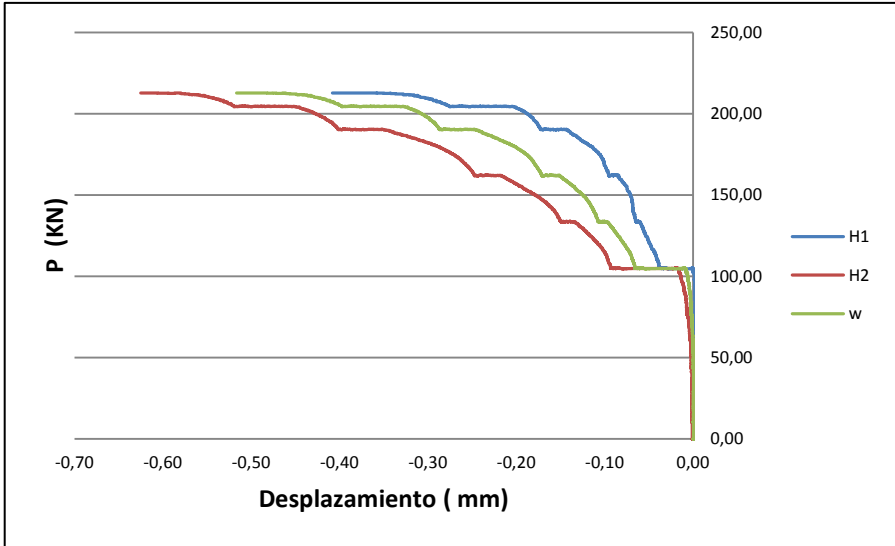


# TRANSDUCTORES: DESPLAZAMIENTOS

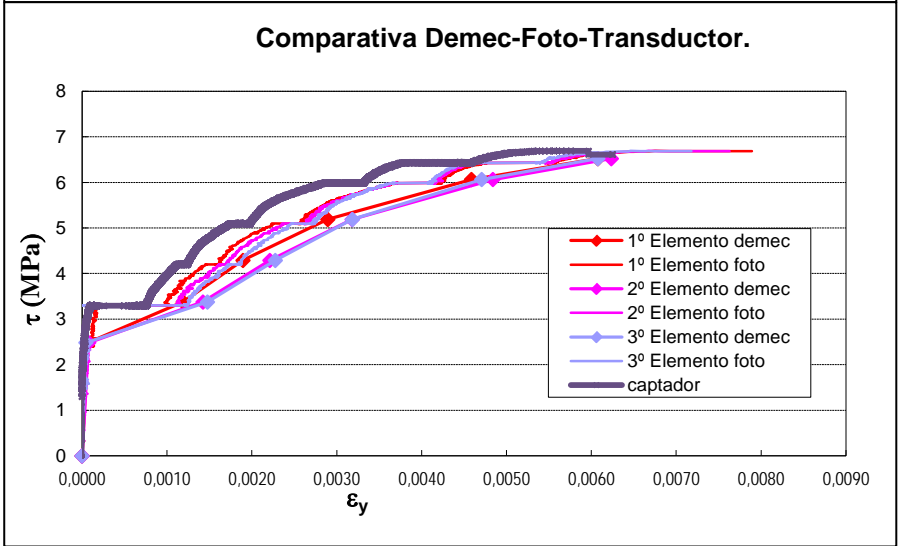
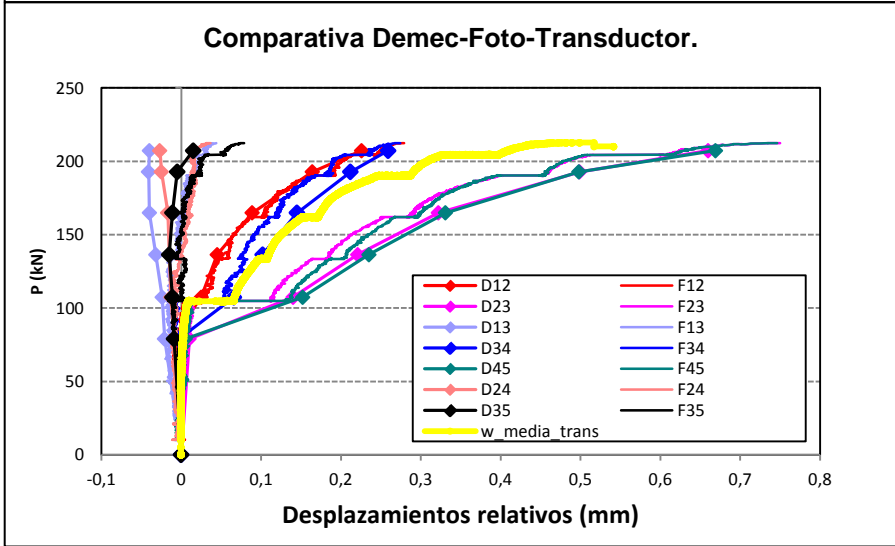
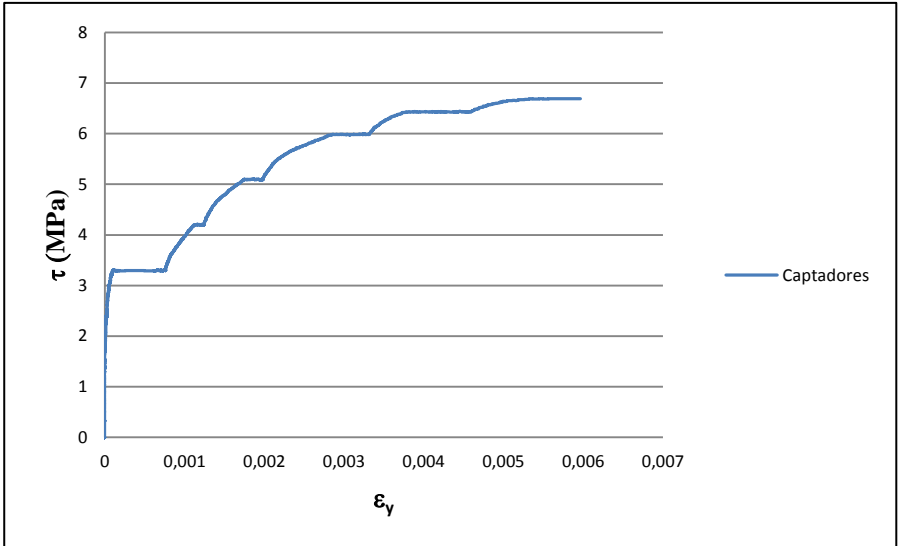


# TRANSDUCTORES

## DESPLAZAMIENTOS



## DEFORMACIONES



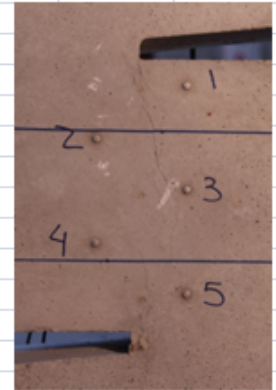
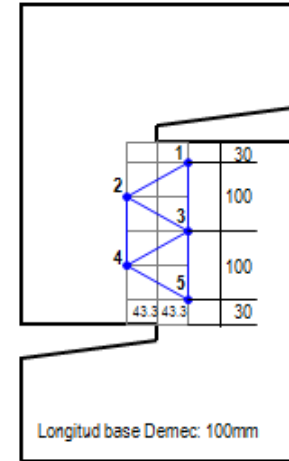
05 Probeta Z-HF-2FI8-NF-1.

# DESPLAZAMIENTOS

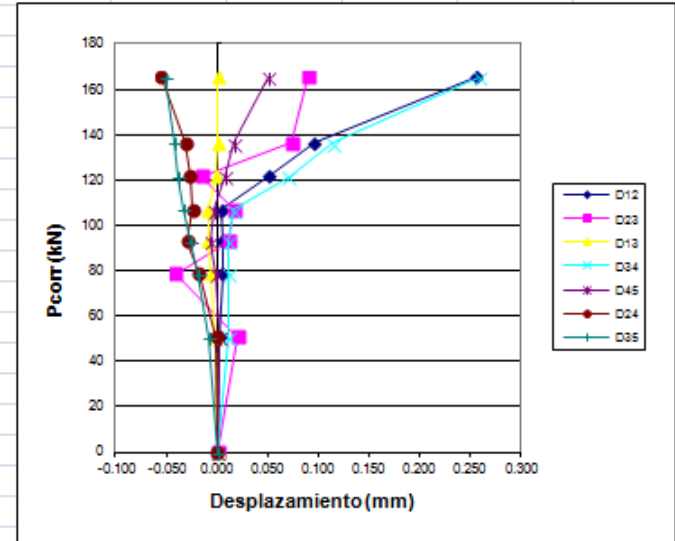
## Mediciones DEMEC

Probeta: Z-HF-2FI8-NF-1  
 Fecha: 29/01/2013

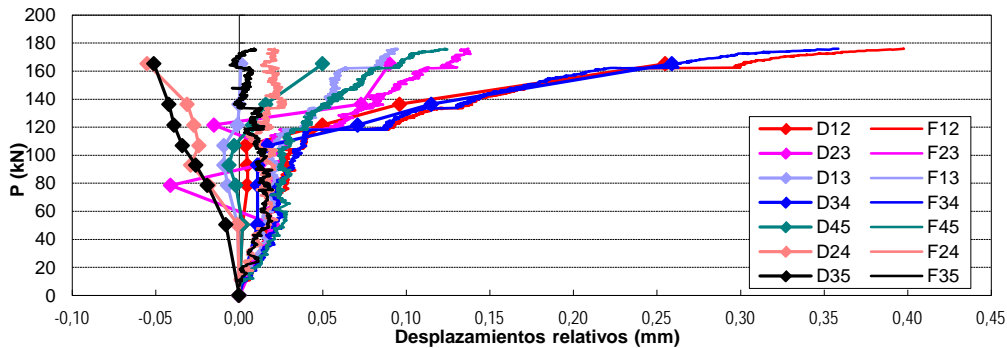
P (T)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12$ (mm)	$\Delta 23$ (mm)	$\Delta 13$ (mm)	$\Delta 34$ (mm)	$\Delta 45$ (mm)	$\Delta 24$ (mm)	$\Delta 35$ (mm)
0	0	-0.863	-1.143	-1.642	0.906	0.457	-1.032	-0.341
4	50.63190174	-0.861	-1.123	-1.643	0.917	0.459	-1.033	-0.349
6	78.55757957	-0.858	-1.184	-1.649	0.917	0.455	-1.050	-0.360
7	93.01899484	-0.858	-1.131	-1.651	0.917	0.451	-1.061	-0.367
8	106.8415396	-0.859	-1.127	-1.651	0.923	0.454	-1.056	-0.375
9	121.5707582	-0.813	-1.158	-1.643	0.977	0.465	-1.059	-0.380
10	136.4431965	-0.767	-1.070	-1.642	1.021	0.473	-1.063	-0.383
12	165.2748954	-0.608	-1.053	-1.641	1.165	0.507	-1.087	-0.392
13.3								



P (kN)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12_{rel}$ (mm)	$\Delta 23_{rel}$ (mm)	$\Delta 13_{rel}$ (mm)	$\Delta 34_{rel}$ (mm)	$\Delta 45_{rel}$ (mm)	$\Delta 24_{rel}$ (mm)	$\Delta 35_{rel}$ (mm)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
40	50.63190174	0.002	0.020	-0.001	0.011	0.002	-0.001	-0.008
60	78.55757957	0.005	-0.041	-0.007	0.011	-0.002	-0.018	-0.019
70	93.01899484	0.005	0.012	-0.009	0.011	-0.006	-0.029	-0.026
80	106.8415396	0.004	0.016	-0.009	0.017	-0.003	-0.024	-0.034
90	121.5707582	0.050	-0.015	-0.001	0.071	0.008	-0.027	-0.039
100	136.4431965	0.096	0.073	0.000	0.115	0.016	-0.031	-0.042
120	165.2748954	0.255	0.090	0.001	0.259	0.050	-0.055	-0.051
133								

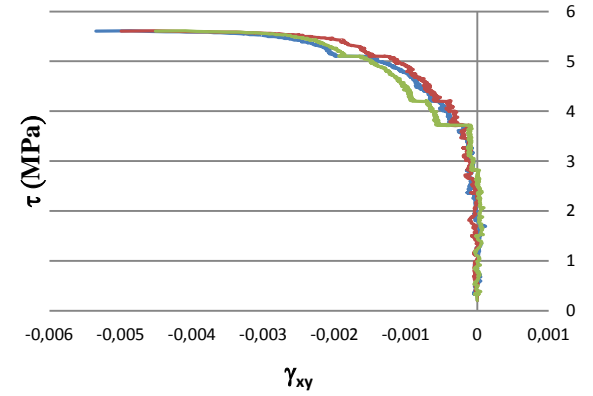
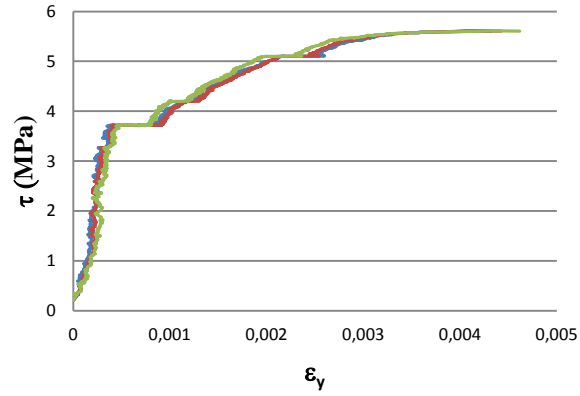
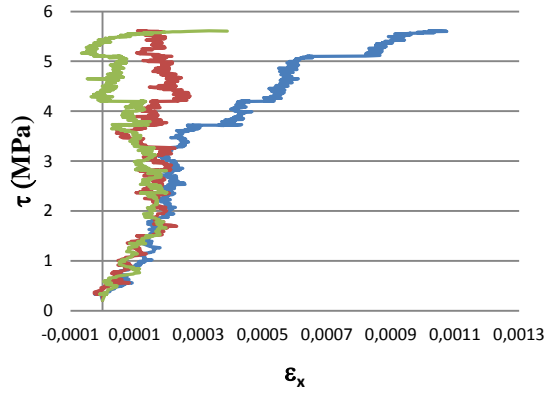


## Comparación DEMEC- Fotogrametría:



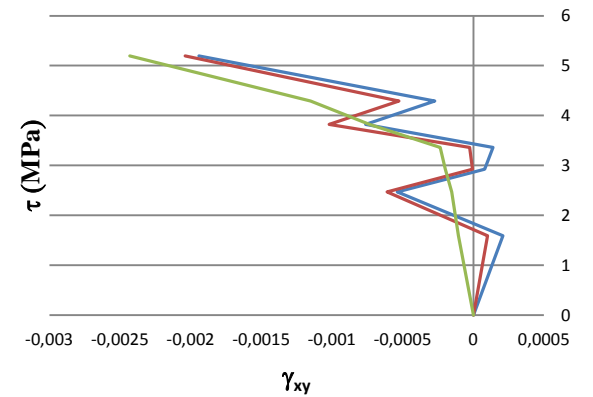
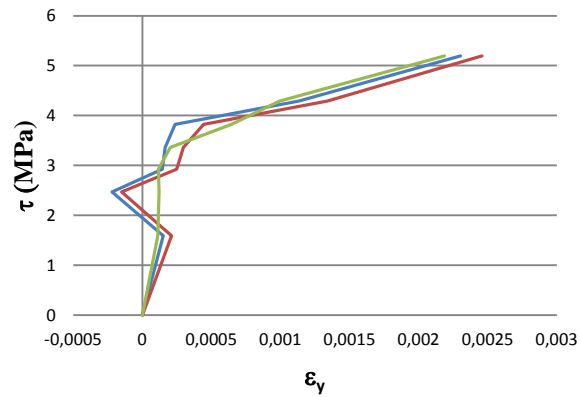
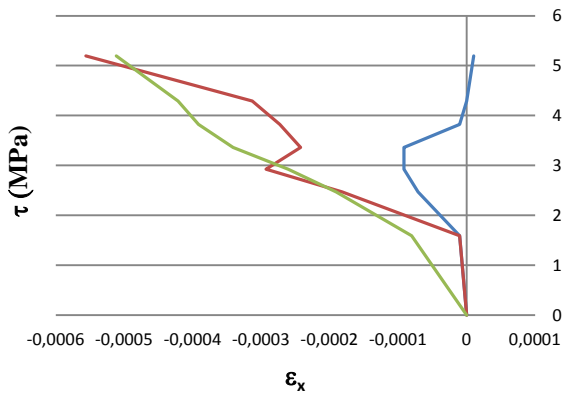
## DEFORMACIONES FOTOGRAMETRÍA

- 1º ELEMENTO
- 2º ELEMENTO
- 3º ELEMENTO



## DEFORMACIONES MEDICIONES DEMEC

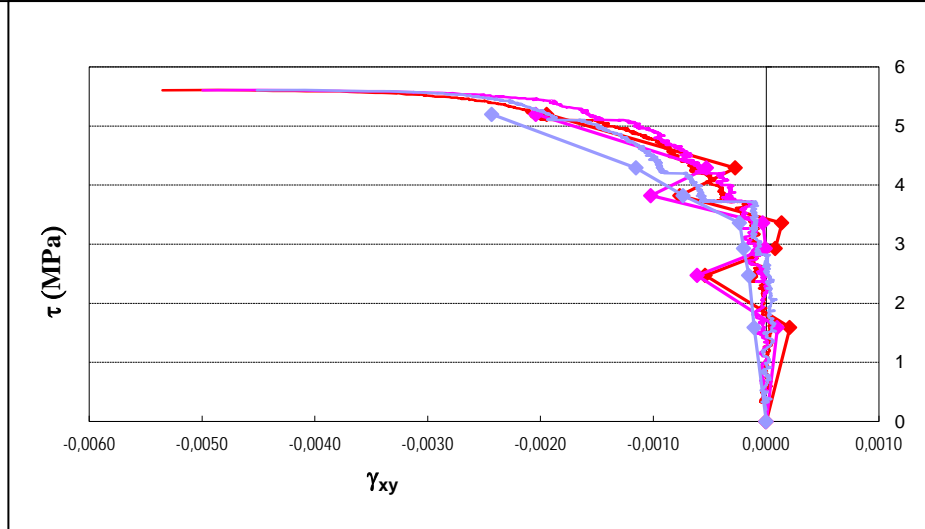
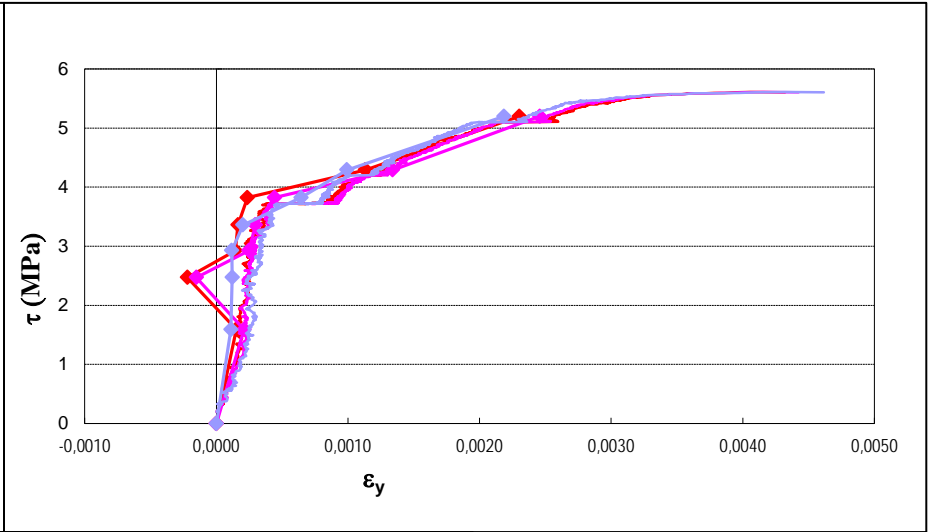
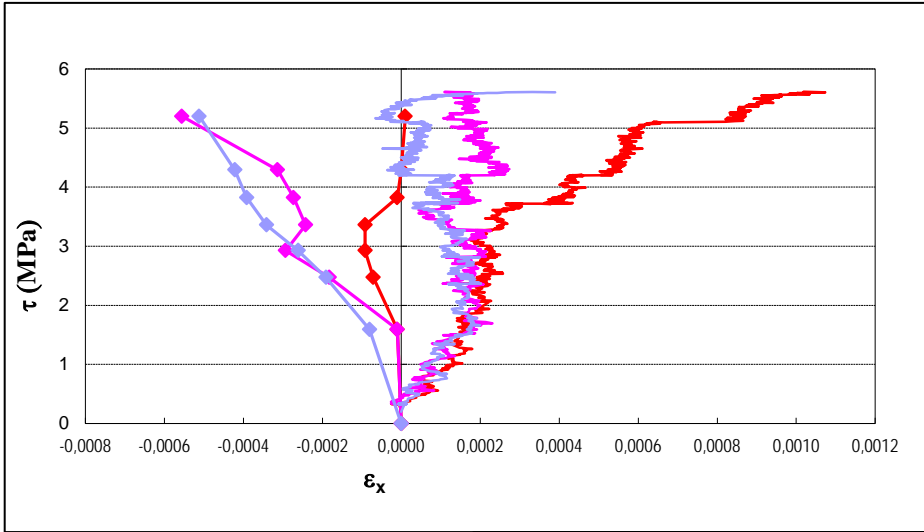
- 1º ELEMENTO
- 2º ELEMENTO
- 3º ELEMENTO



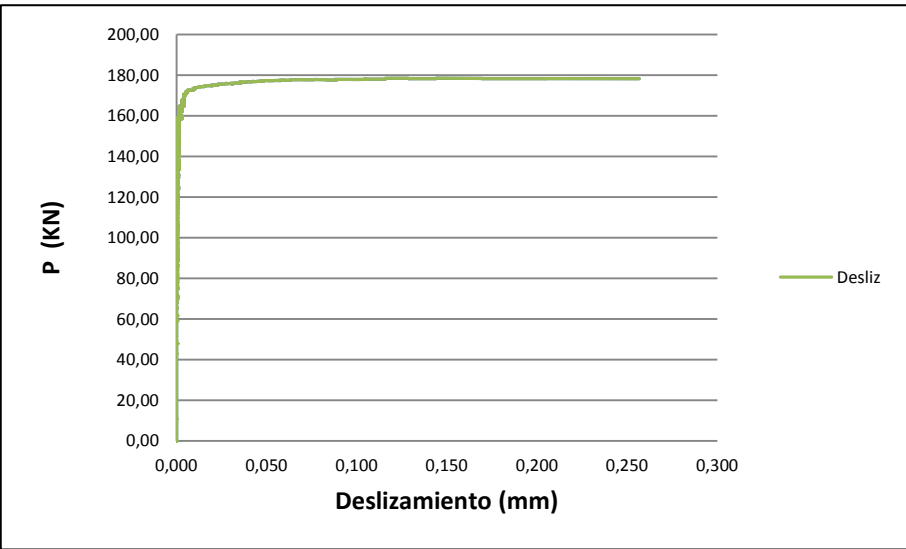
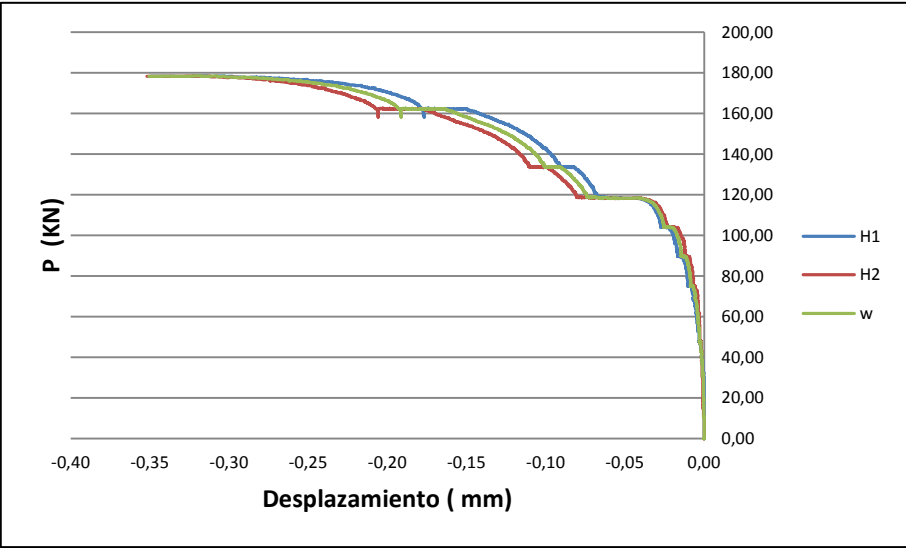
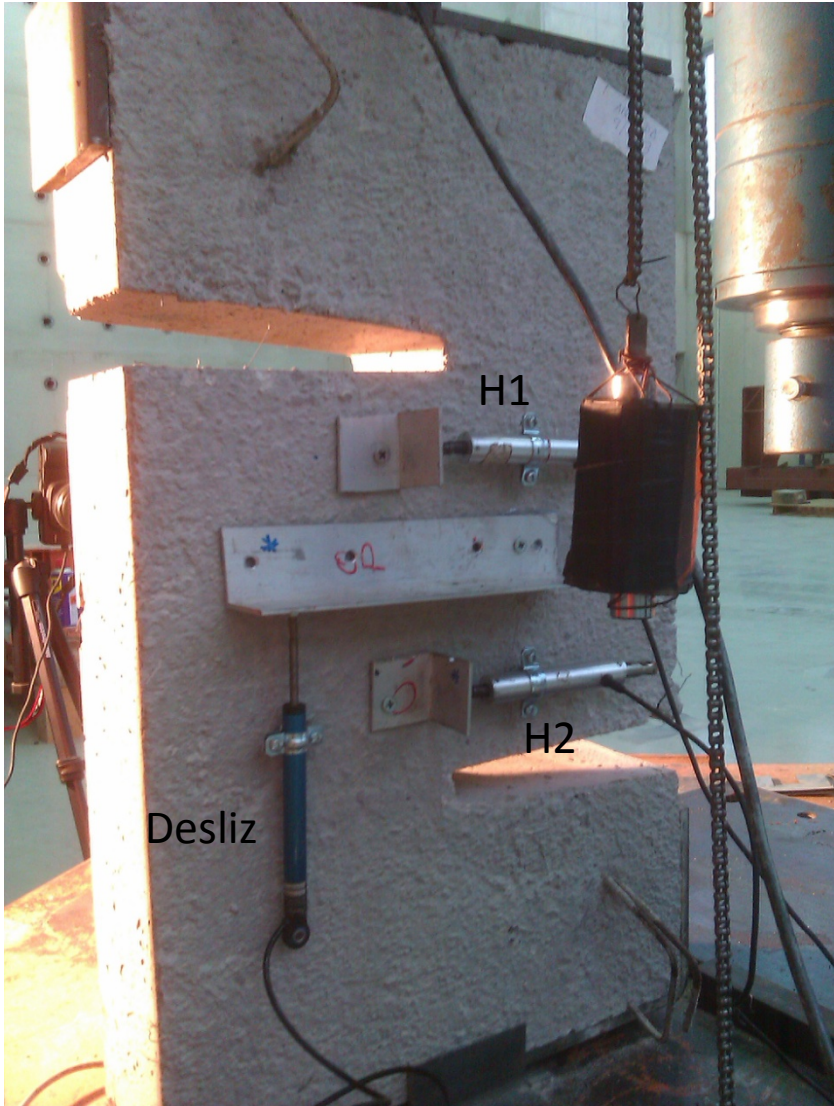


# COMPARATIVA DEFORMACIONES DEMEC - FOTO

- 1° Elemento demec
- 1° Elemento foto
- 2° Elemento demec
- 2° Elemento foto
- 3° Elemento demec
- 3° Elemento foto

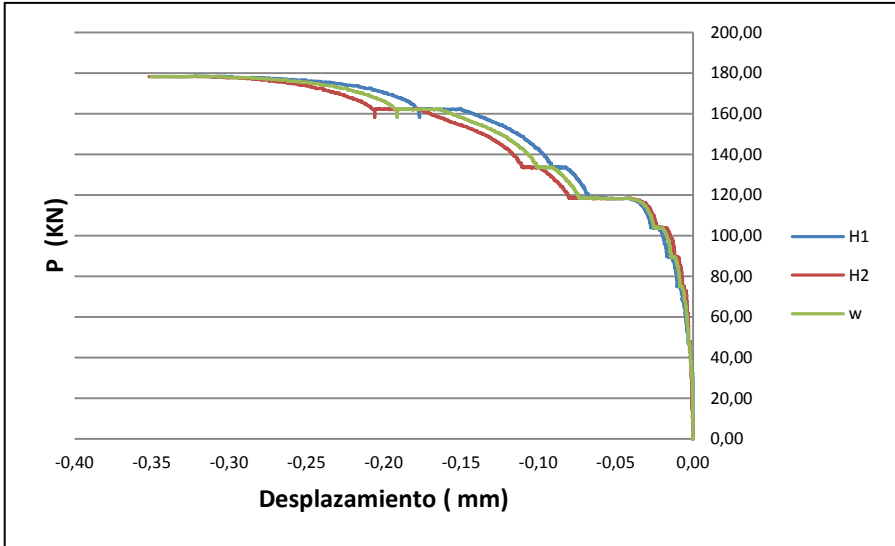


# TRANSDUCTORES: DESPLAZAMIENTOS

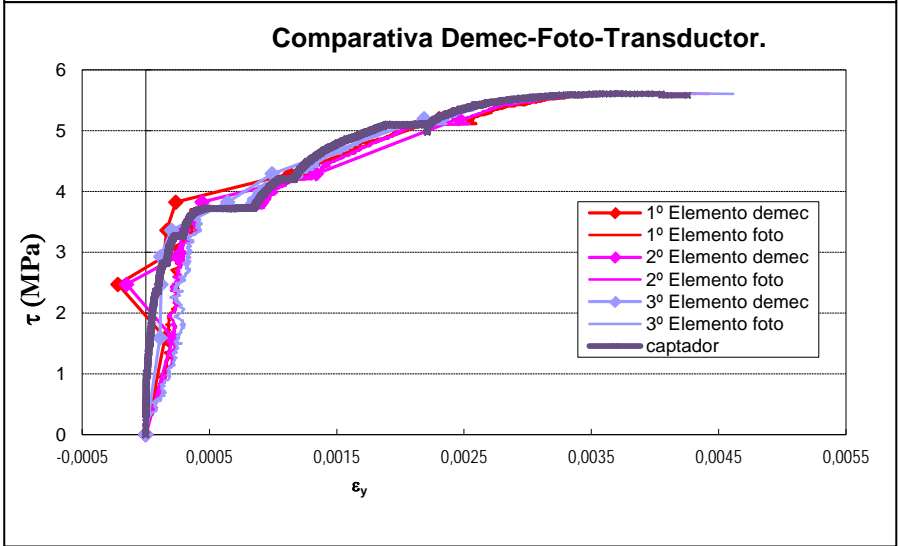
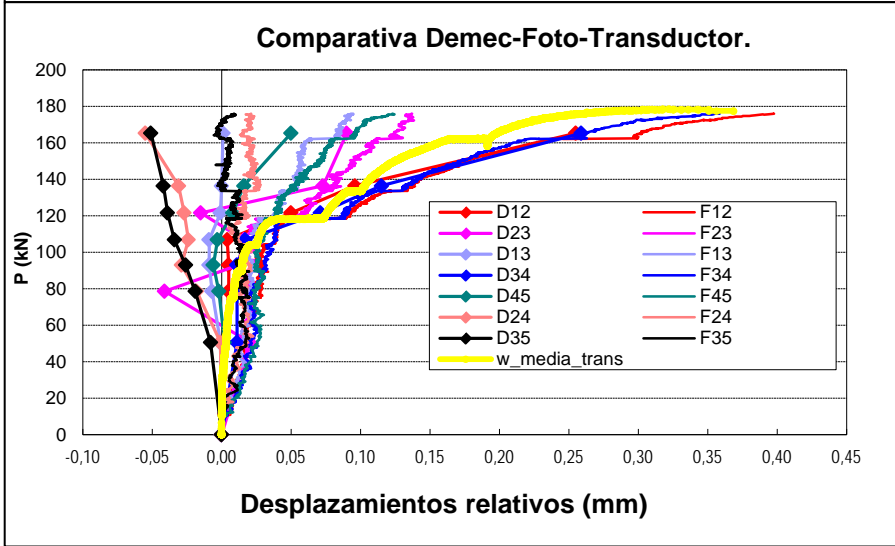
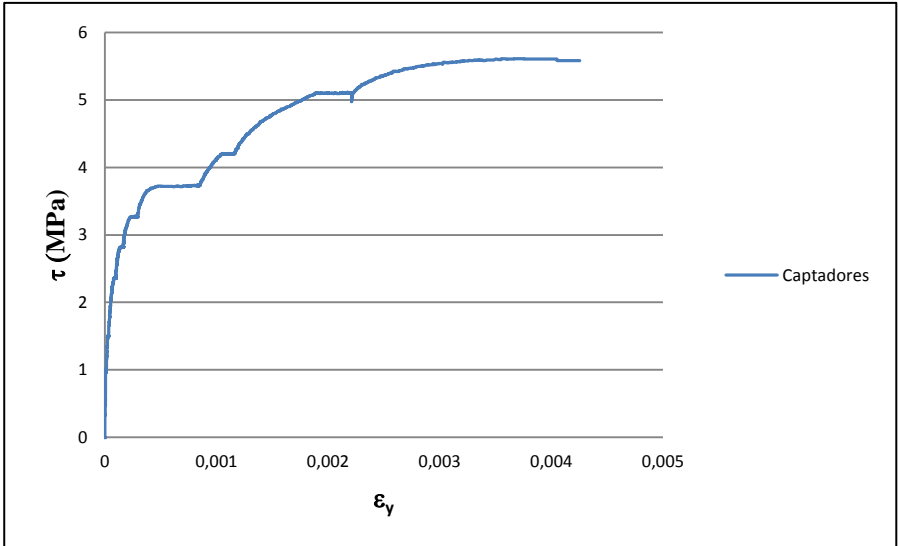


# TRANSDUCTORES

## DESPLAZAMIENTOS



## DEFORMACIONES



07 Probeta Z-HF-3FI8-NF-1.

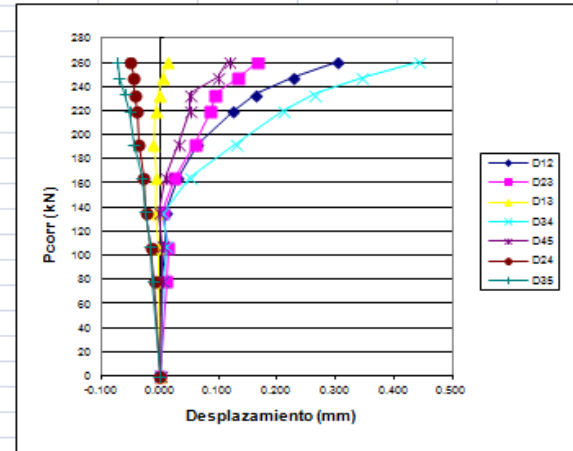
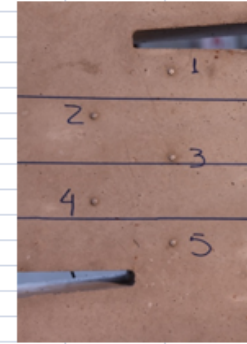
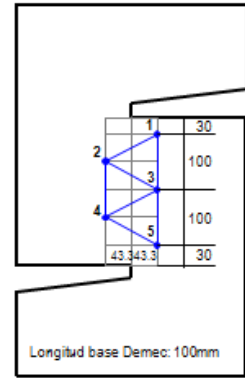
# DESPLAZAMIENTOS

## Mediciones DEMEC

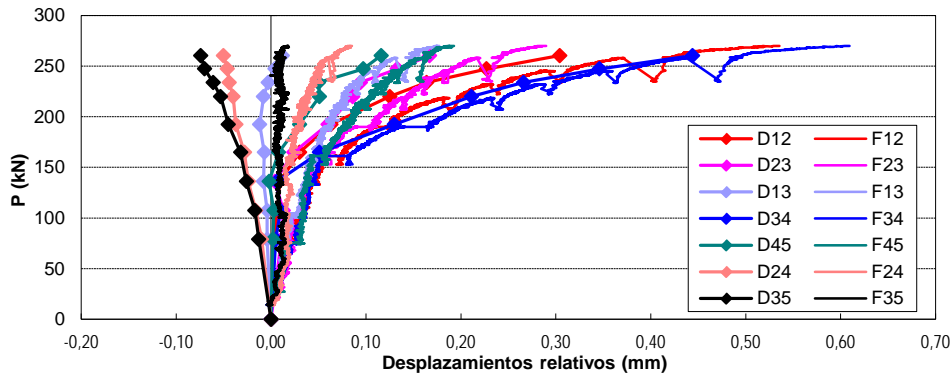
Probeta: Z-HF-3F18-NF-1  
 Fecha: 31/01/2013

P (T)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12$ (mm)	$\Delta 23$ (mm)	$\Delta 13$ (mm)	$\Delta 34$ (mm)	$\Delta 45$ (mm)	$\Delta 24$ (mm)	$\Delta 35$ (mm)
0	0	-0.693	-0.747	-0.652	-0.809	-0.061	-1.269	-1.102
6	78.96413087	-0.690	-0.736	-0.656	-0.804	-0.059	-1.279	-1.115
8	107.4803809	-0.686	-0.734	-0.656	-0.799	-0.058	-1.285	-1.119
10	136.091882	-0.684	-0.743	-0.660	-0.803	-0.063	-1.293	-1.128
12	164.6816445	-0.663	-0.723	-0.659	-0.758	-0.053	-1.297	-1.134
14	192.4469535	-0.630	-0.687	-0.664	-0.679	-0.031	-1.306	-1.147
16	219.9395312	-0.568	-0.661	-0.660	-0.598	-0.010	-1.309	-1.155
17	233.7469122	-0.529	-0.653	-0.655	-0.543	-0.011	-1.313	-1.163
18	247.2527743	-0.466	-0.614	-0.648	-0.463	0.036	-1.315	-1.172
19	260.2749626	-0.389	-0.580	-0.640	-0.365	0.055	-1.319	-1.176

P (kN)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12rel$ (mm)	$\Delta 23rel$ (mm)	$\Delta 13rel$ (mm)	$\Delta 34rel$ (mm)	$\Delta 45rel$ (mm)	$\Delta 24rel$ (mm)	$\Delta 35rel$ (mm)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
60	78.96413087	0.003	0.011	-0.004	0.005	0.002	-0.010	-0.013
80	107.4803809	0.007	0.013	-0.004	0.010	0.003	-0.016	-0.017
100	136.091882	0.009	0.004	-0.008	0.006	-0.002	-0.024	-0.026
120	164.6816445	0.030	0.024	-0.007	0.051	0.008	-0.028	-0.032
140	192.4469535	0.063	0.060	-0.012	0.130	0.030	-0.037	-0.045
160	219.9395312	0.125	0.086	-0.008	0.211	0.051	-0.040	-0.053
170	233.7469122	0.164	0.094	-0.003	0.266	0.050	-0.044	-0.061
180	247.2527743	0.227	0.133	0.004	0.346	0.097	-0.046	-0.070
190	260.2749626	0.304	0.167	0.012	0.444	0.116	-0.050	-0.074

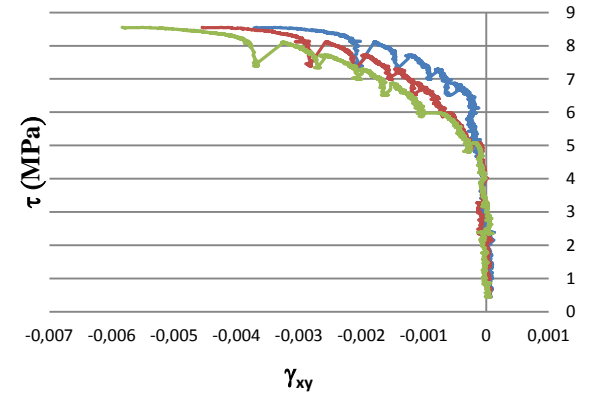
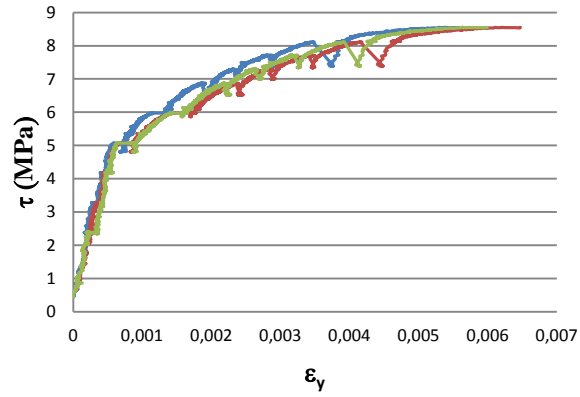
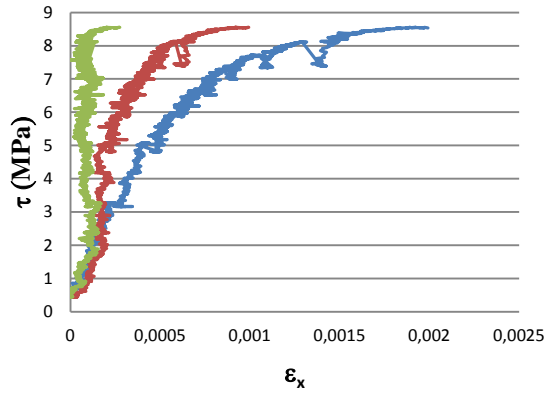


## Comparación DEMEC- Fotogrametría:



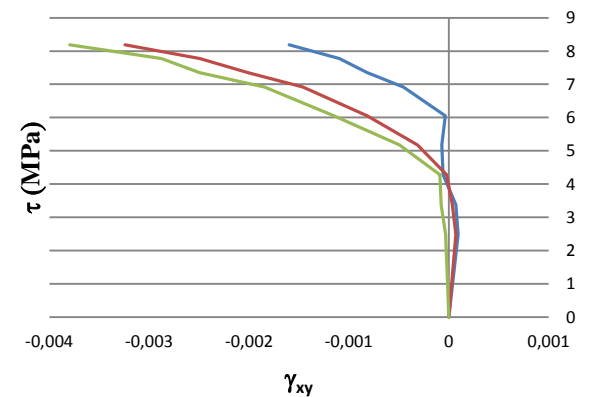
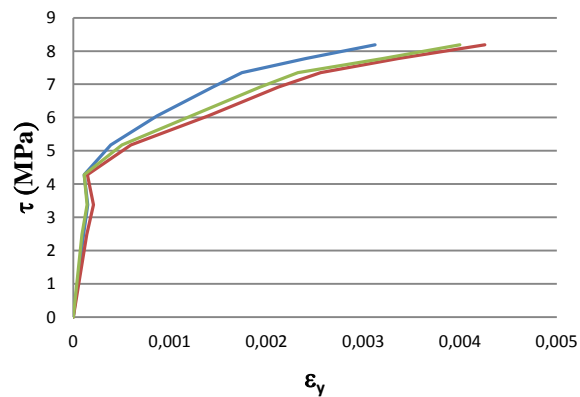
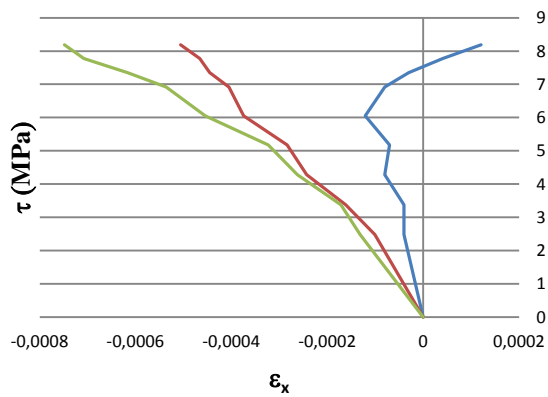
## DEFORMACIONES FOTOGRAMETRÍA

— 1º ELEMENTO  
 — 2º ELEMENTO  
 — 3º ELEMENTO



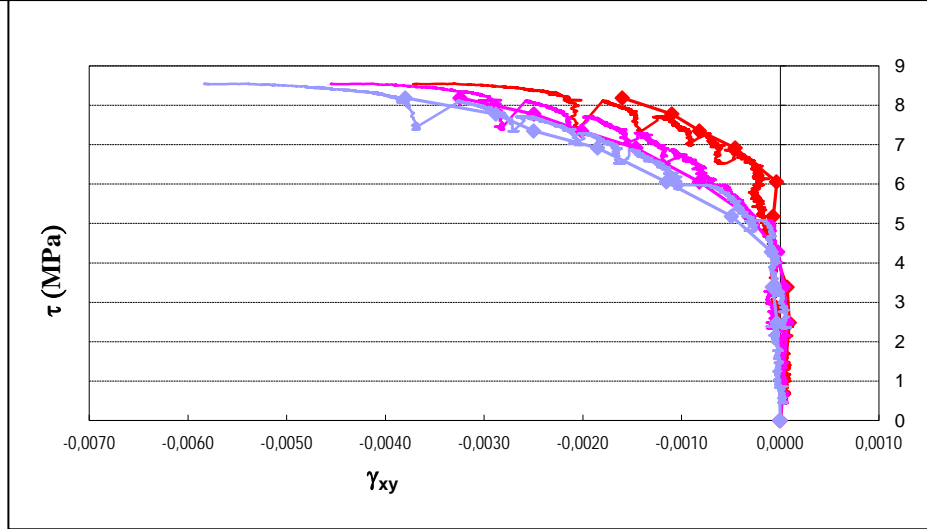
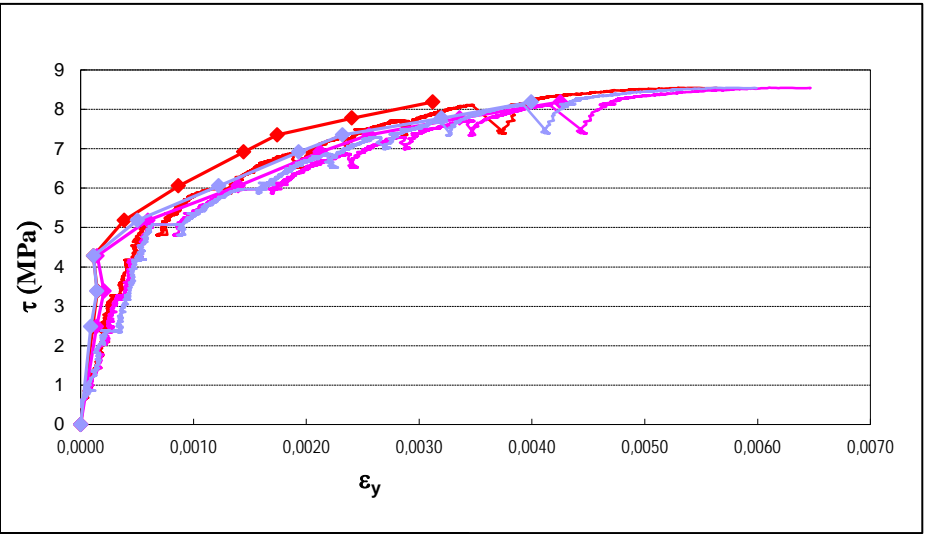
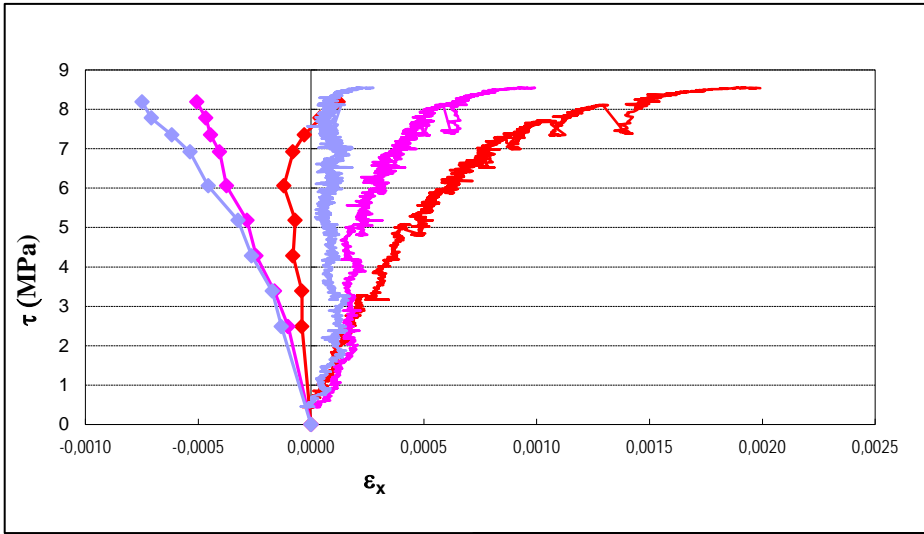
## DEFORMACIONES MEDICIONES DEMEC

— 1º ELEMENTO  
 — 2º ELEMENTO  
 — 3º ELEMENTO

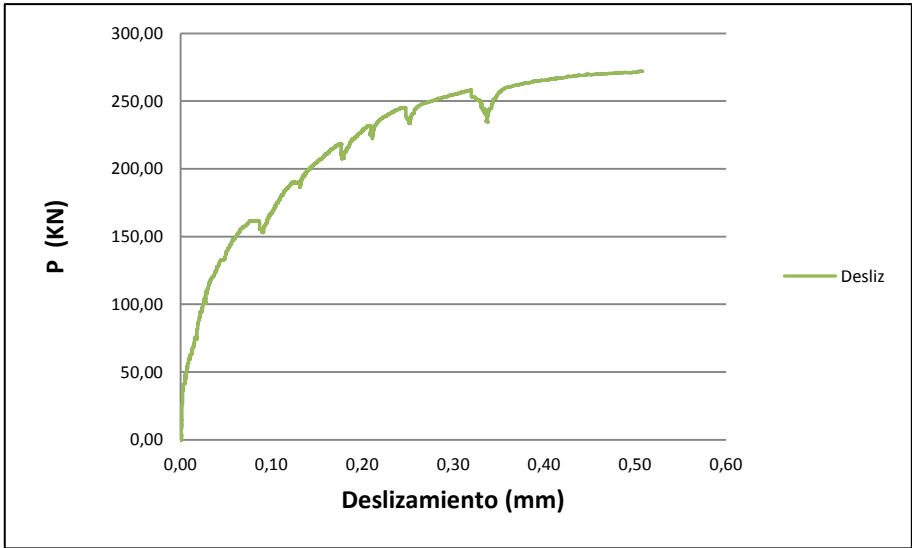
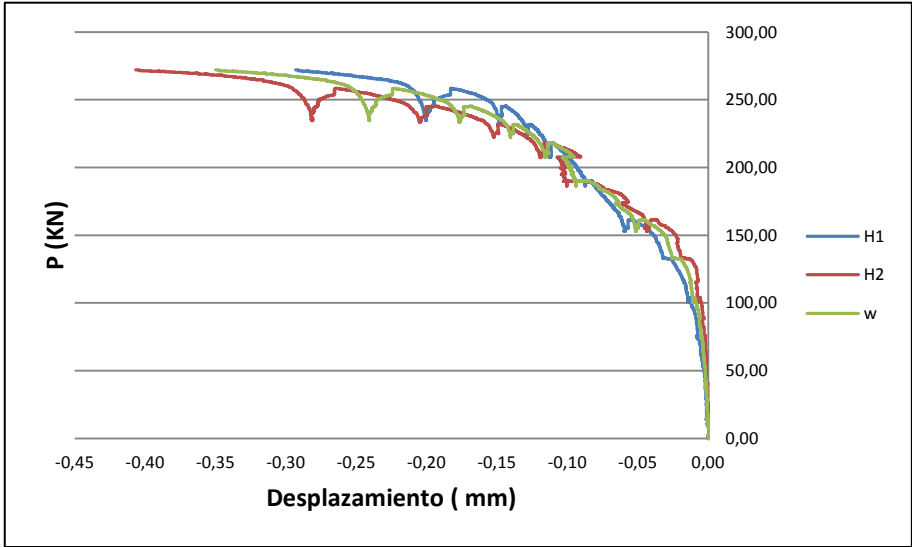
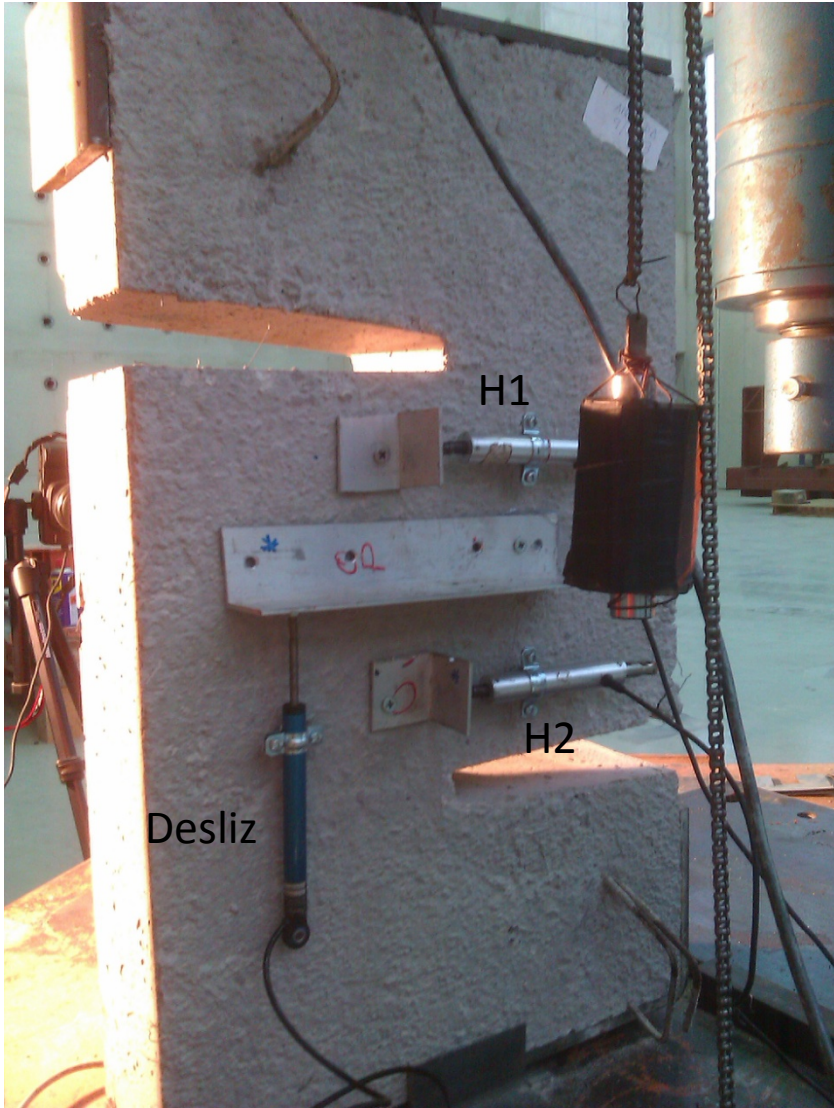


# COMPARATIVA DEFORMACIONES DEMEC - FOTO

- 1° Elemento demec
- 1° Elemento foto
- 2° Elemento demec
- 2° Elemento foto
- 3° Elemento demec
- 3° Elemento foto



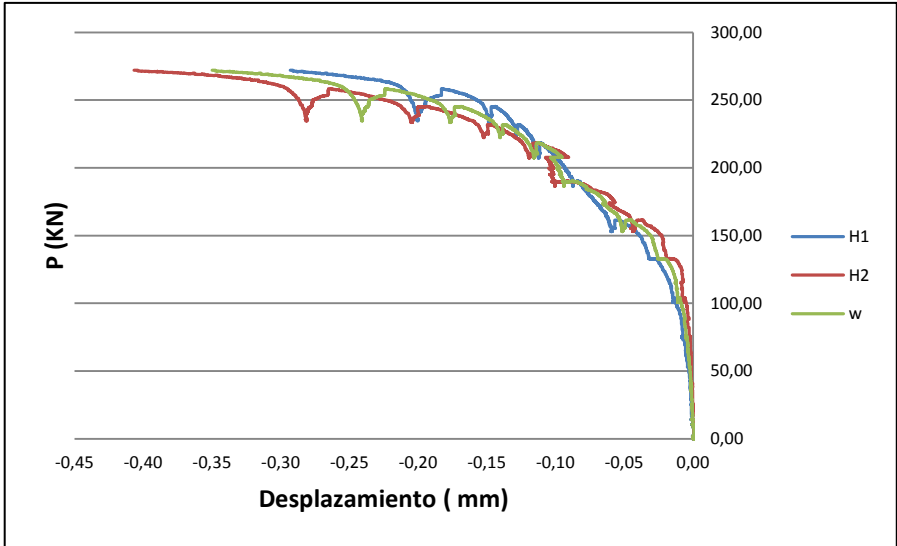
# TRANSDUCTORES: DESPLAZAMIENTOS



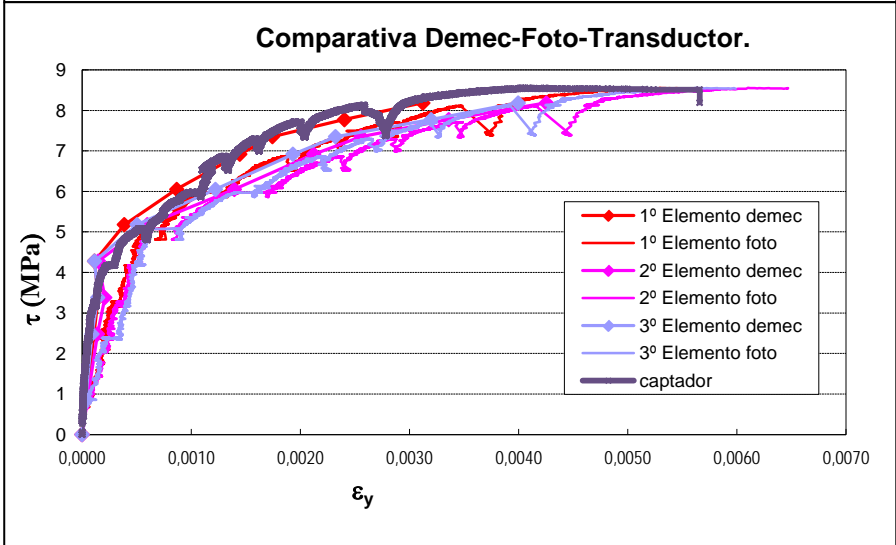
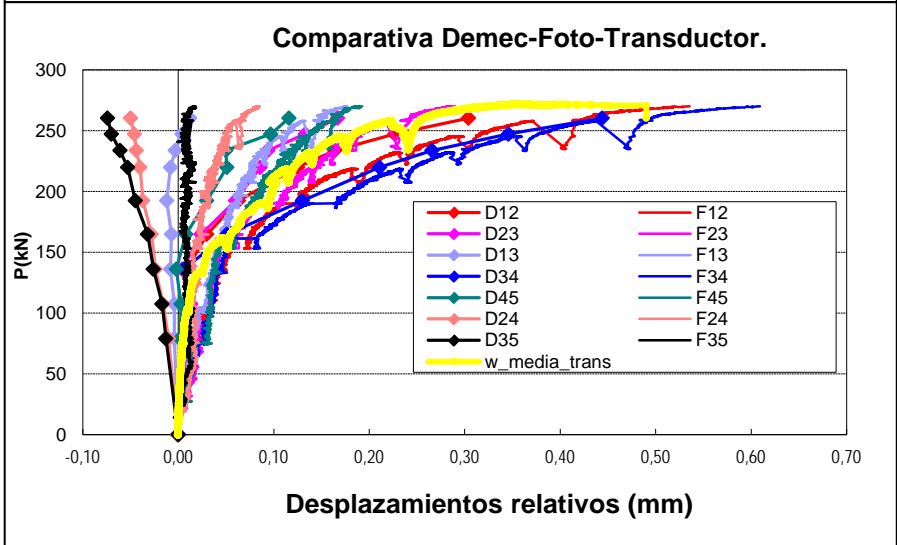
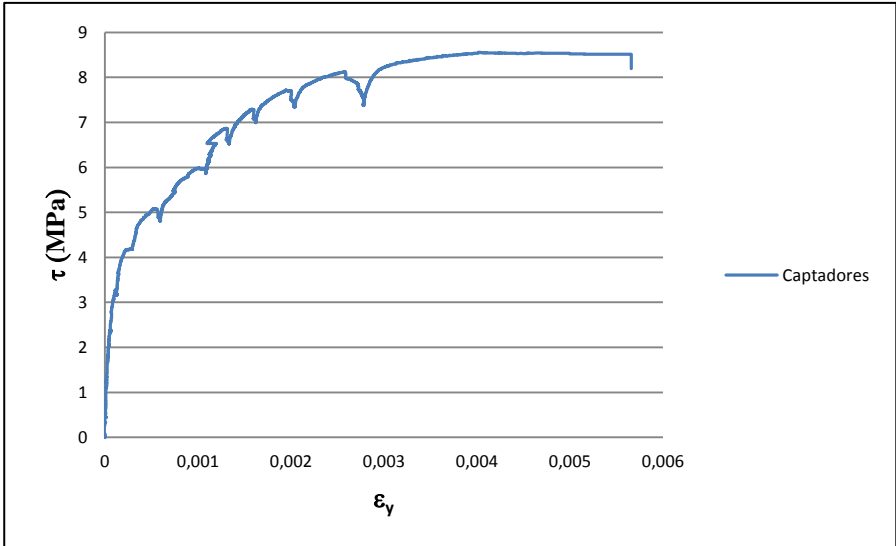


# TRANSDUCTORES

## DESPLAZAMIENTOS



## DEFORMACIONES



08 Probeta Z-HF-3FI8-NF-2.

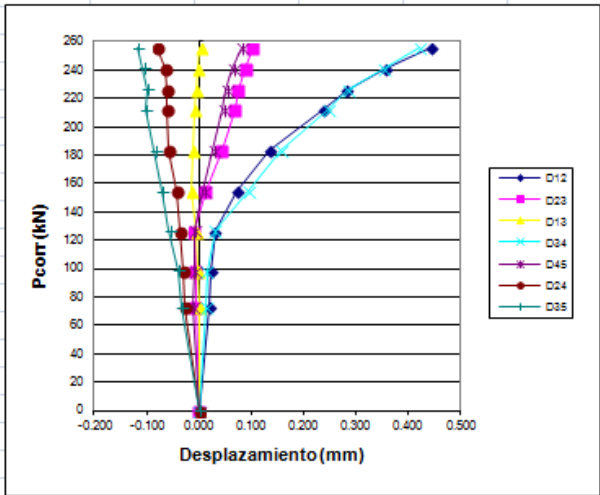
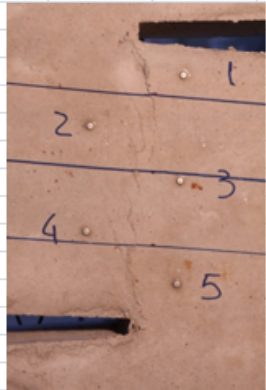
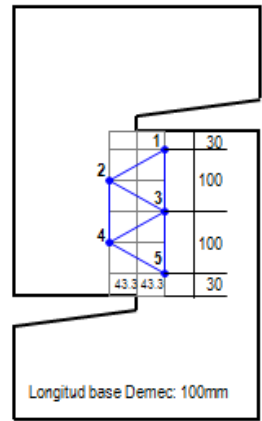
# DESPLAZAMIENTOS

## Mediciones DEMEC

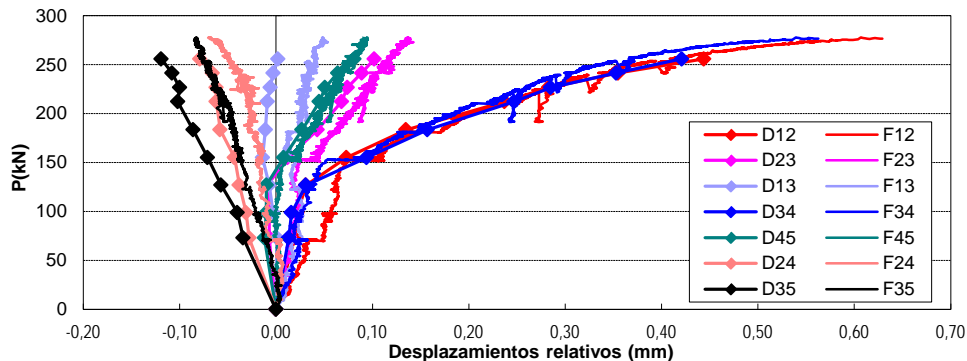
Probeta: Z-HF-3FI8-NF-2  
 Fecha: 31/01/2013

P (T)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12$ (mm)	$\Delta 23$ (mm)	$\Delta 13$ (mm)	$\Delta 34$ (mm)	$\Delta 45$ (mm)	$\Delta 24$ (mm)	$\Delta 35$ (mm)
0	0	-0.347	-0.063	-0.387	-0.217	0.246	-1.014	-1.685
6	72.92403093	-0.328	-0.070	-0.386	-0.204	0.234	-1.042	-1.719
8	98.76870259	-0.325	-0.070	-0.390	-0.201	0.236	-1.045	-1.725
10	126.781971	-0.316	-0.072	-0.394	-0.186	0.236	-1.052	-1.742
12	154.8332538	-0.274	-0.051	-0.401	-0.123	0.254	-1.057	-1.756
14	183.3105027	-0.212	-0.020	-0.398	-0.060	0.273	-1.072	-1.771
16	212.1013039	-0.110	0.005	-0.396	0.030	0.291	-1.076	-1.787
17	226.5115962	-0.064	0.011	-0.393	0.068	0.297	-1.076	-1.785
18	241.4042733	0.008	0.026	-0.390	0.136	0.310	-1.080	-1.793
19	255.7610953	0.097	0.039	-0.385	0.204	0.327	-1.093	-1.804

P (kN)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12rel$ (mm)	$\Delta 23rel$ (mm)	$\Delta 13rel$ (mm)	$\Delta 34rel$ (mm)	$\Delta 45rel$ (mm)	$\Delta 24rel$ (mm)	$\Delta 35rel$ (mm)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
60	72.92403093	0.019	-0.007	0.001	0.013	-0.012	-0.028	-0.034
80	98.76870259	0.022	-0.007	-0.003	0.016	-0.010	-0.031	-0.040
100	126.781971	0.031	-0.009	-0.007	0.031	-0.010	-0.038	-0.057
120	154.8332538	0.073	0.012	-0.014	0.094	0.008	-0.043	-0.071
140	183.3105027	0.135	0.043	-0.011	0.157	0.027	-0.058	-0.086
160	212.1013039	0.237	0.068	-0.009	0.247	0.045	-0.062	-0.102
170	226.5115962	0.283	0.074	-0.006	0.285	0.051	-0.062	-0.100
180	241.4042733	0.355	0.089	-0.003	0.353	0.064	-0.066	-0.108
190	255.7610953	0.444	0.102	0.002	0.421	0.081	-0.079	-0.119

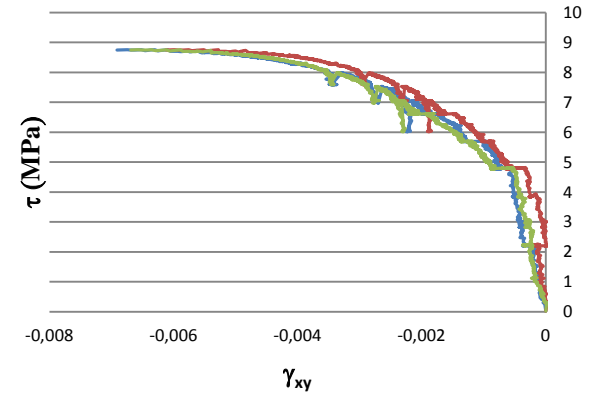
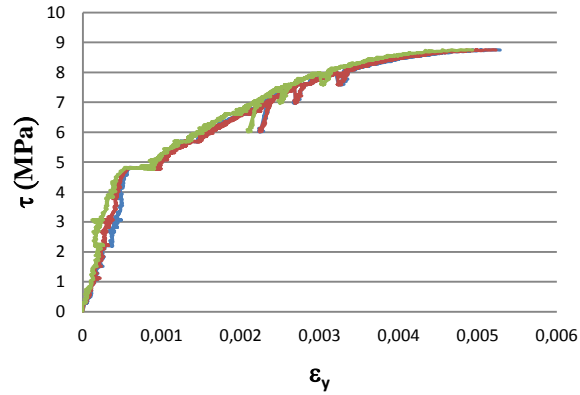
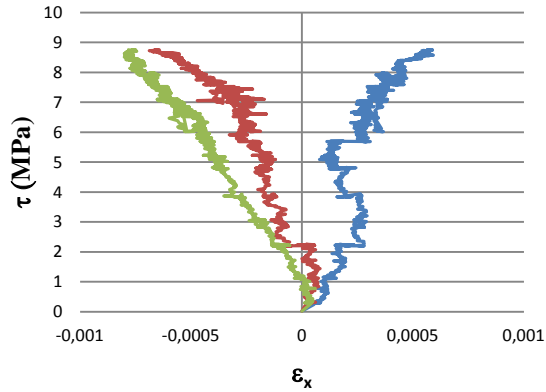


### Comparación DEMEC- Fotogrametría:



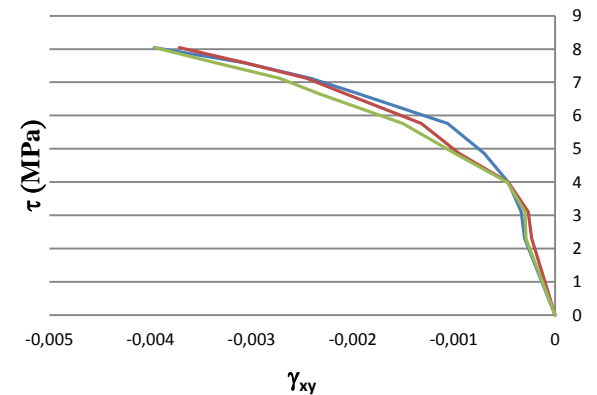
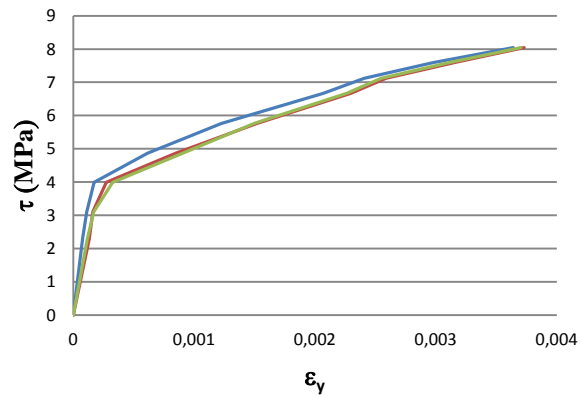
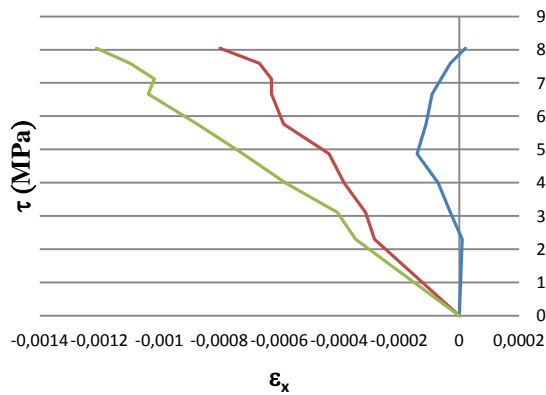
## DEFORMACIONES FOTOGRAMETRÍA

- 1º ELEMENTO
- 2º ELEMENTO
- 3º ELEMENTO



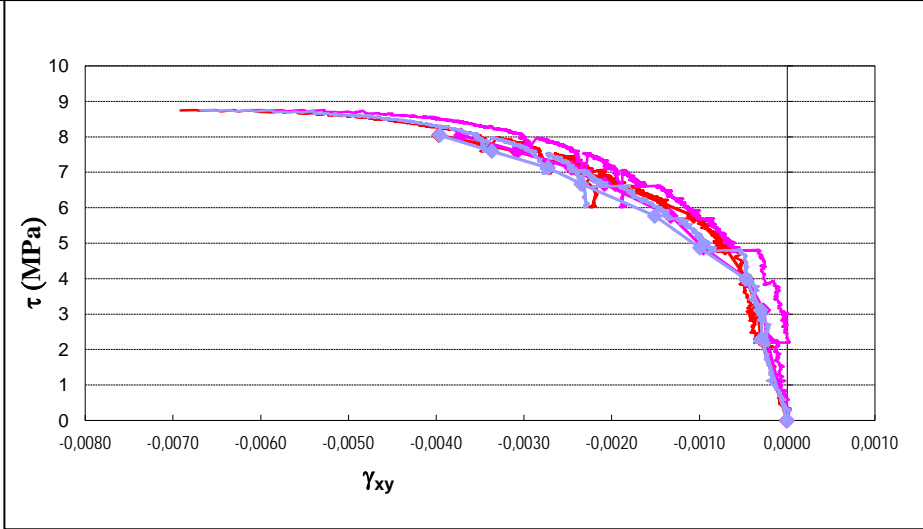
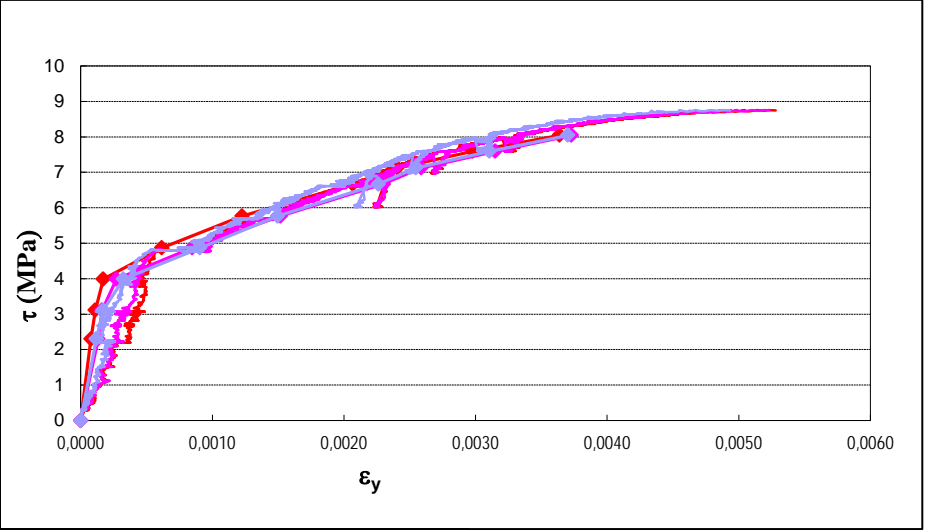
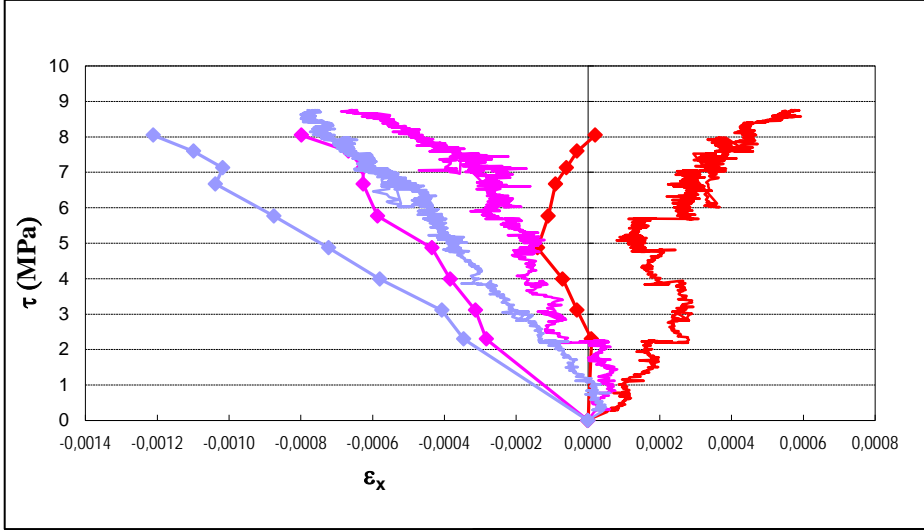
## DEFORMACIONES MEDICIONES DEMEC

- 1º ELEMENTO
- 2º ELEMENTO
- 3º ELEMENTO

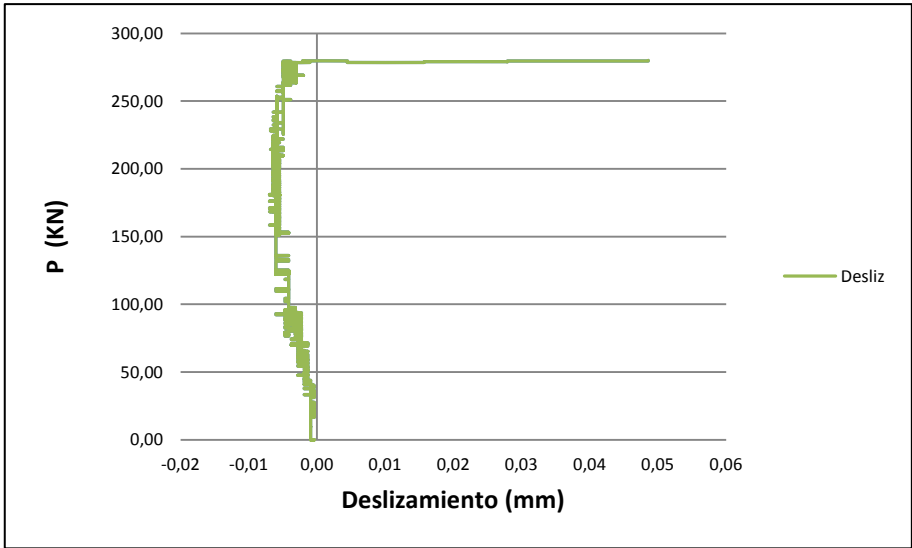
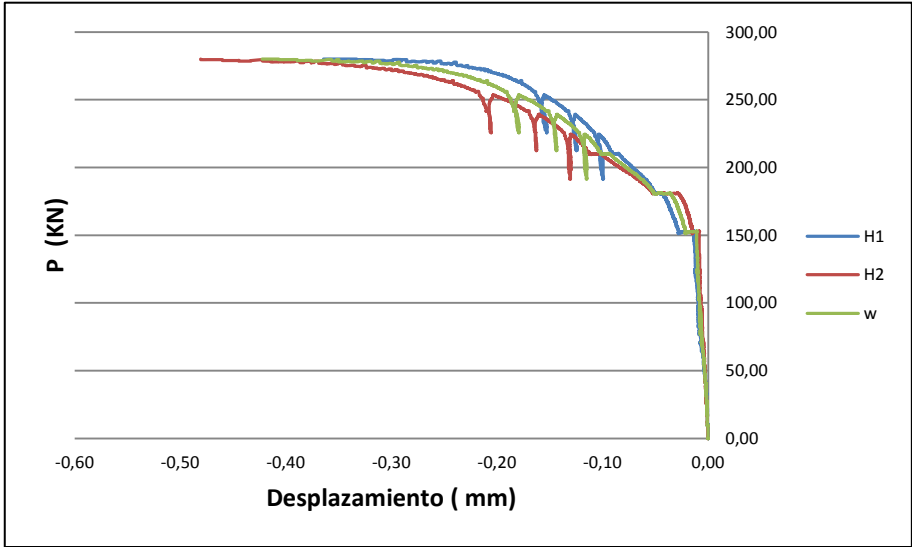
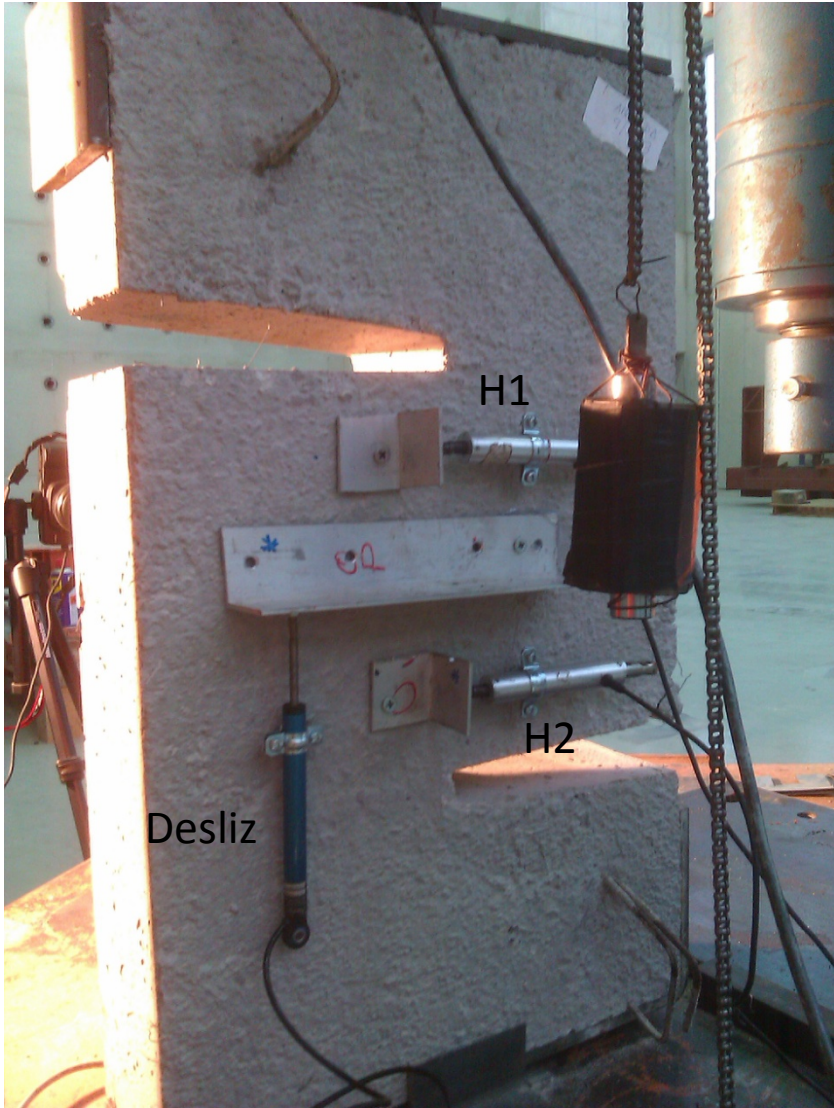


# COMPARATIVA DEFORMACIONES DEMEC - FOTO

- 1° Elemento demec
- 1° Elemento foto
- 2° Elemento demec
- 2° Elemento foto
- 3° Elemento demec
- 3° Elemento foto

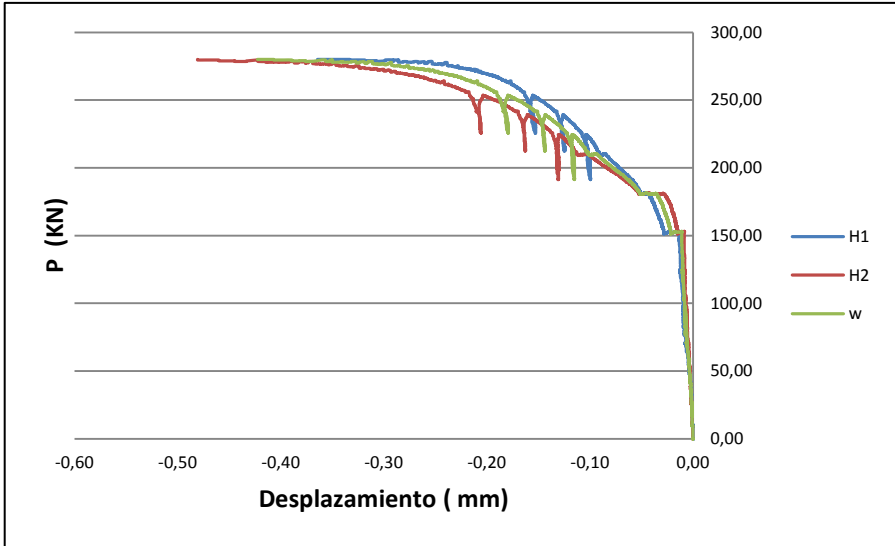


# TRANSDUCTORES: DESPLAZAMIENTOS

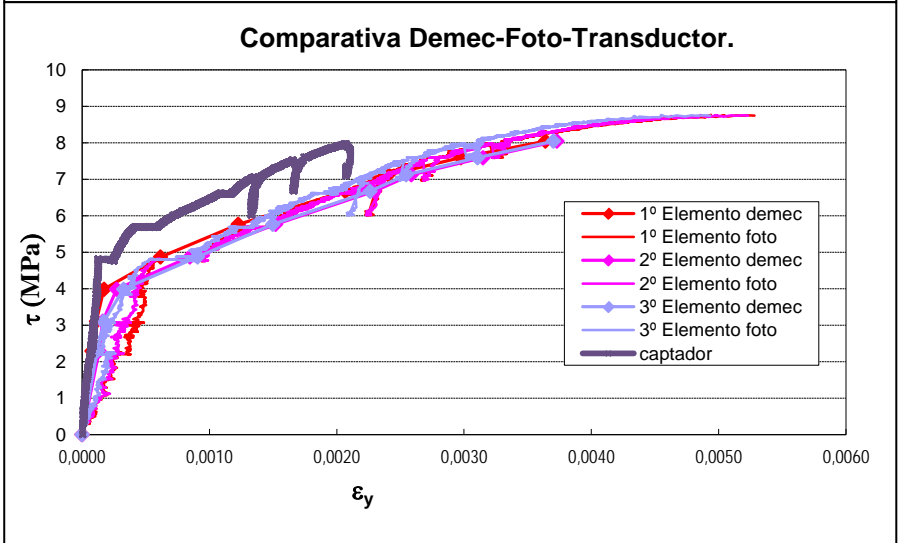
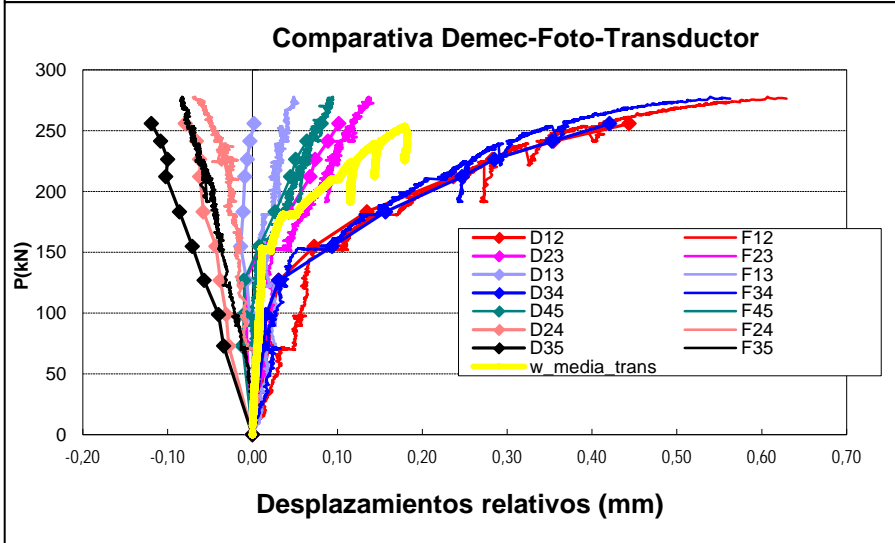
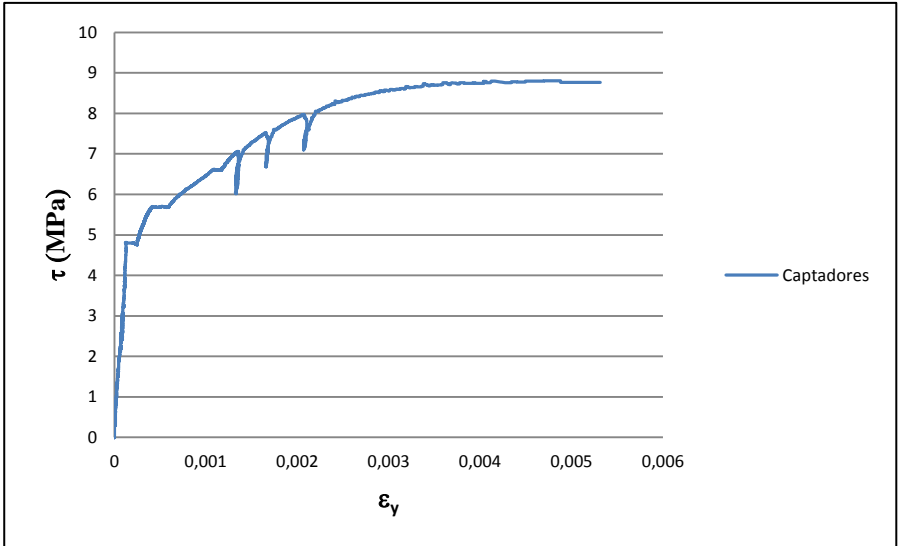


# TRANSDUCTORES

## DESPLAZAMIENTOS



## DEFORMACIONES



09 Probeta Z-HF-0FI8-NF-1.



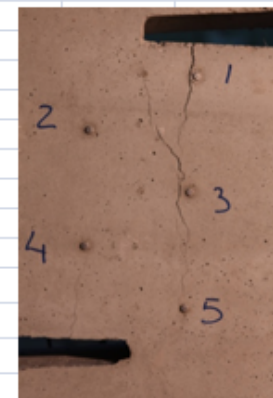
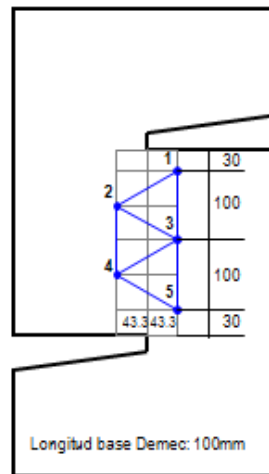
# DESPLAZAMIENTOS

## Mediciones DEMEC

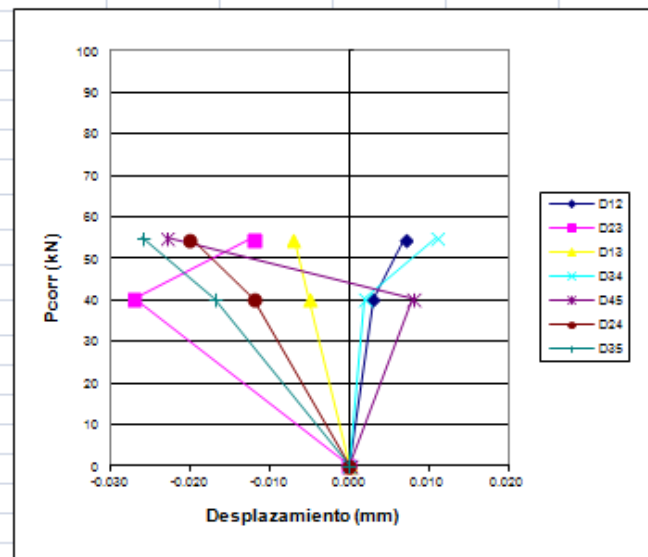
Probeta: Z-HF-0F18-NF-1

Fecha: 21/02/2013

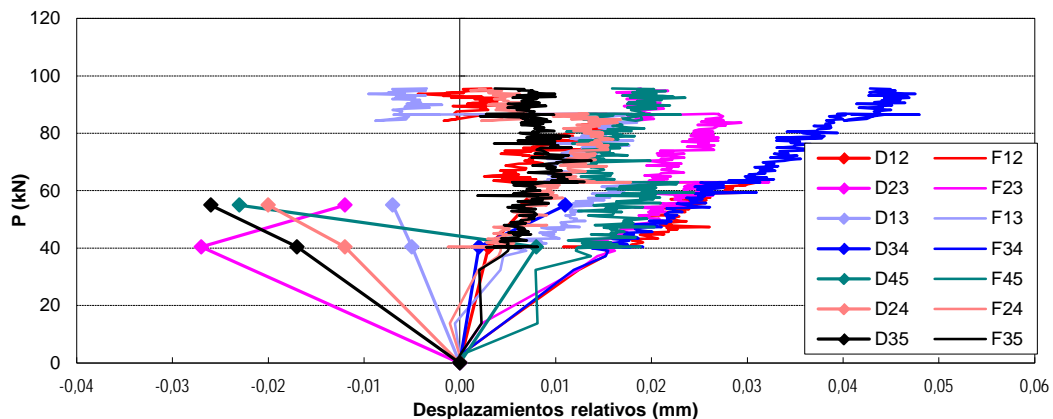
P (T)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12$ (mm)	$\Delta 23$ (mm)	$\Delta 13$ (mm)	$\Delta 34$ (mm)	$\Delta 45$ (mm)	$\Delta 24$ (mm)	$\Delta 35$ (mm)
0	0	0.052	0.060	-1.567	-0.474	0.076	-0.986	-0.225
6	40.39525542	0.055	0.033	-1.572	-0.472	0.084	-0.998	-0.242
8	54.92101193	0.059	0.048	-1.574	-0.463	0.053	-1.006	-0.251
10	69.67549897							



P (kN)	Pcorregida(kN)	$\Delta 12$ rel (mm)	$\Delta 23$ rel (mm)	$\Delta 13$ rel (mm)	$\Delta 34$ rel (mm)	$\Delta 45$ rel (mm)	$\Delta 24$ rel (mm)	$\Delta 35$ rel (mm)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
60	40.39525542	0.003	-0.027	-0.005	0.002	0.008	-0.012	-0.017
80	54.92101193	0.007	-0.012	-0.007	0.011	-0.023	-0.020	-0.026
100	69.67549897							

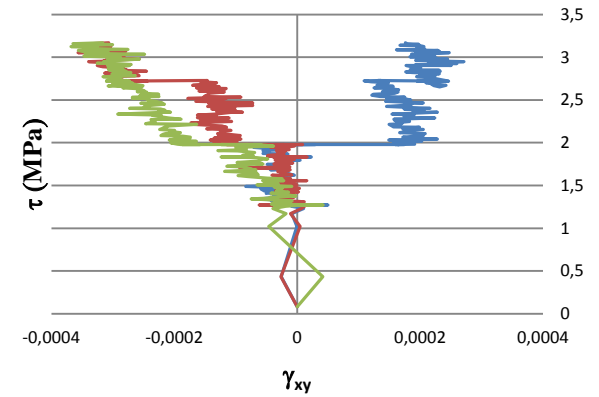
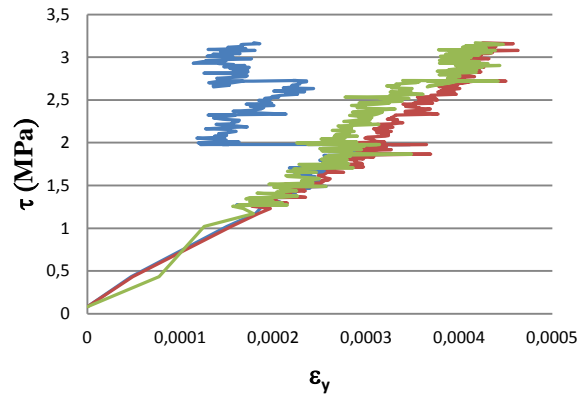
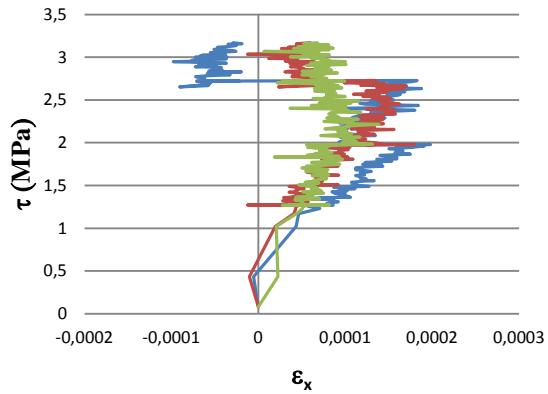


## Comparación DEMEC- Fotogrametría:



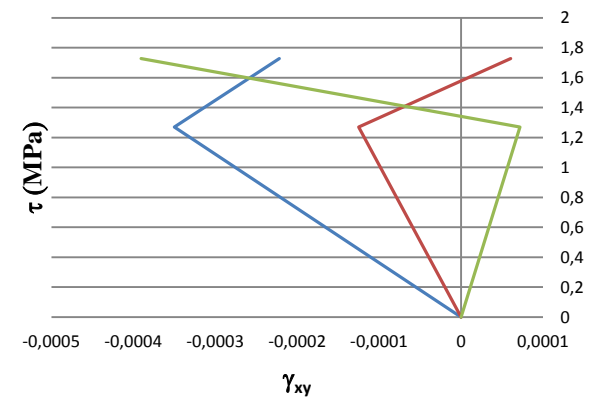
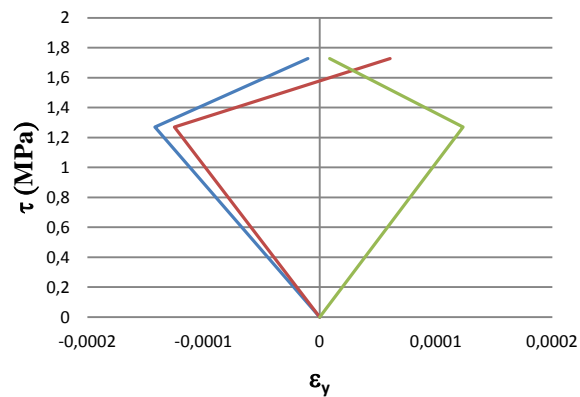
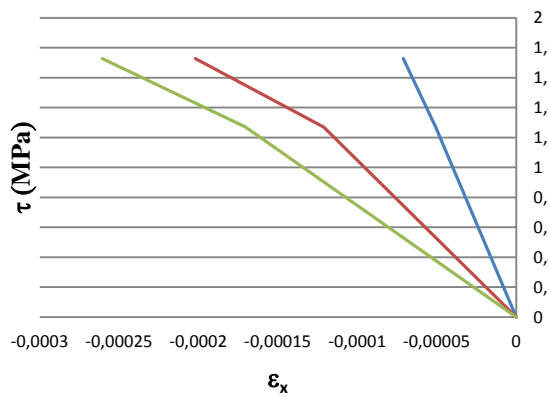
## DEFORMACIONES FOTOGRAMETRÍA

— 1º ELEMENTO  
— 2º ELEMENTO  
— 3º ELEMENTO



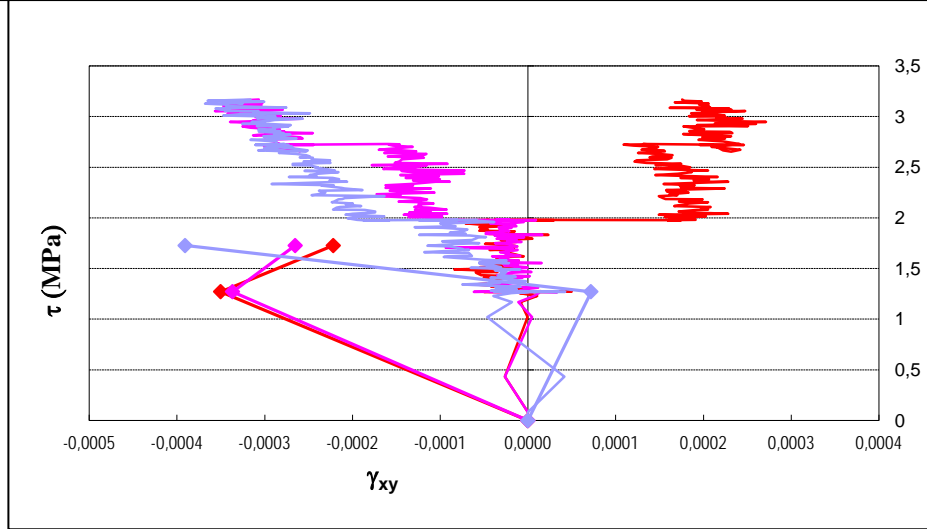
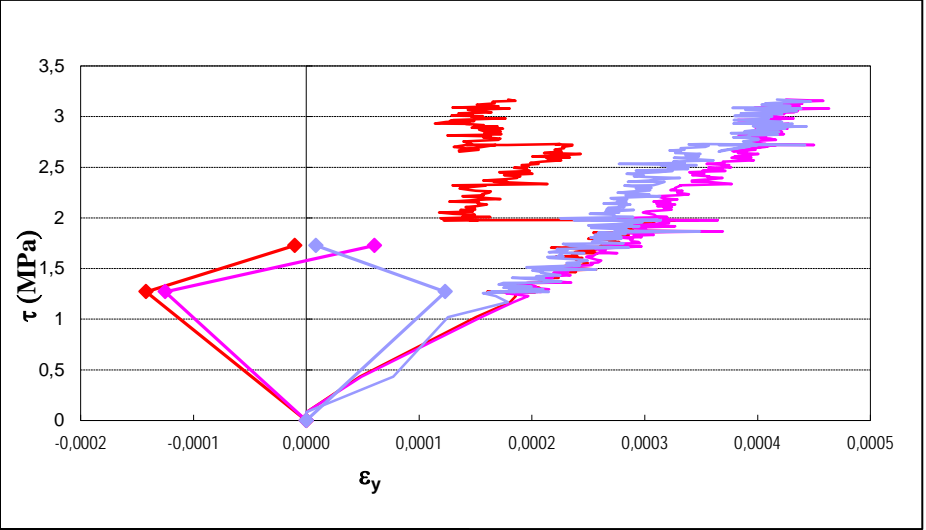
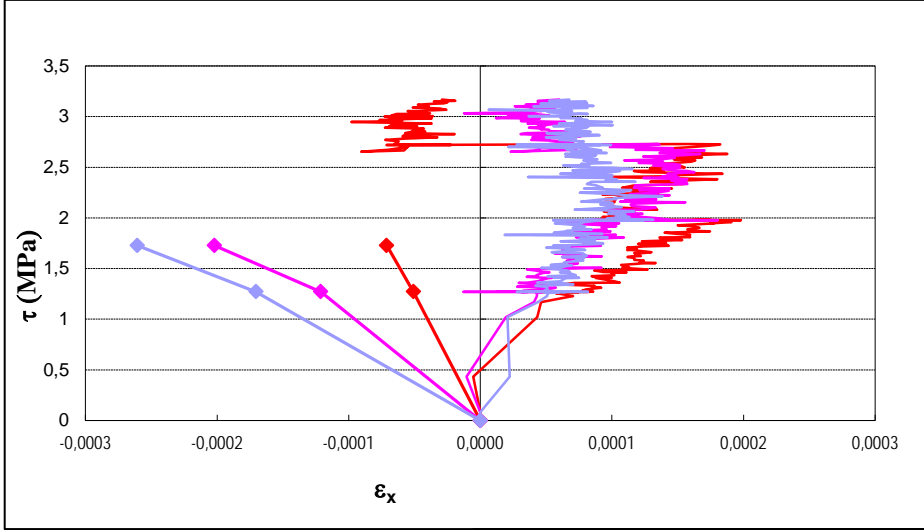
## DEFORMACIONES MEDICIONES DEMEC

— 1º ELEMENTO  
— 2º ELEMENTO  
— 3º ELEMENTO

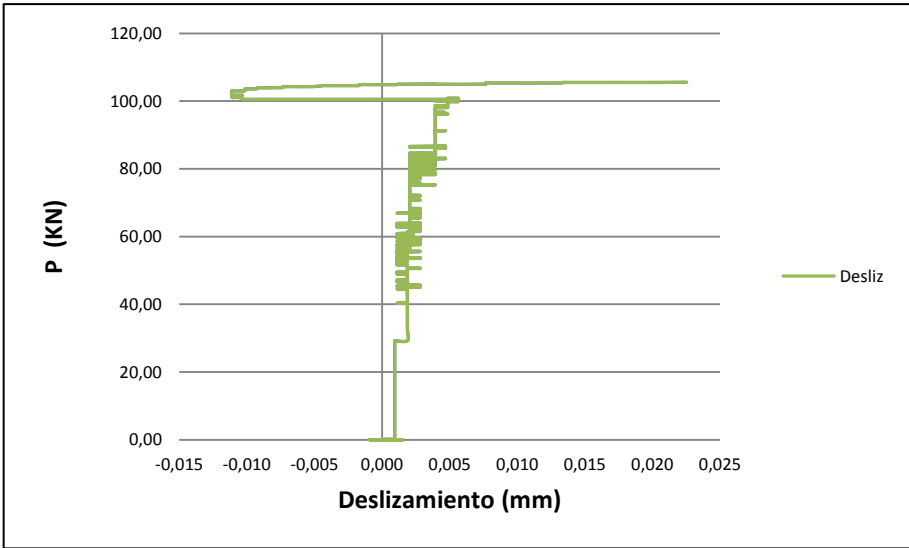
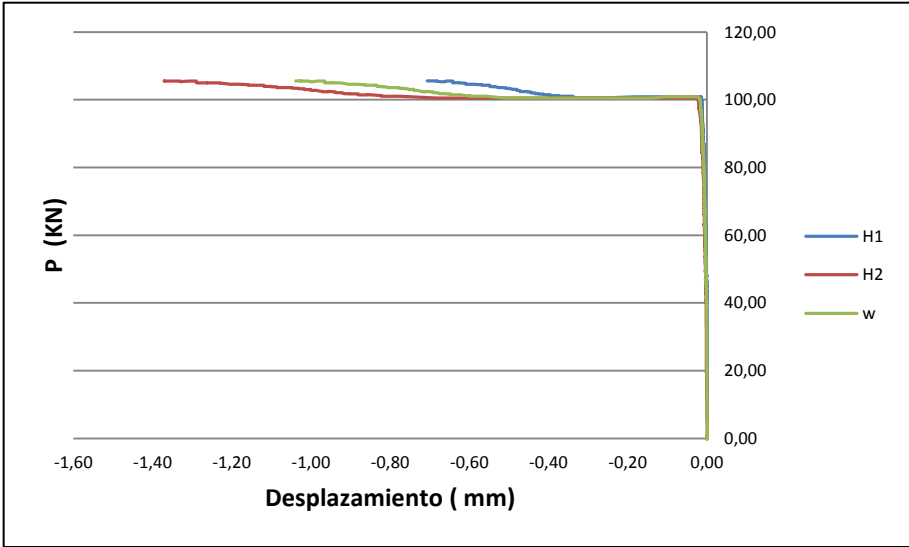
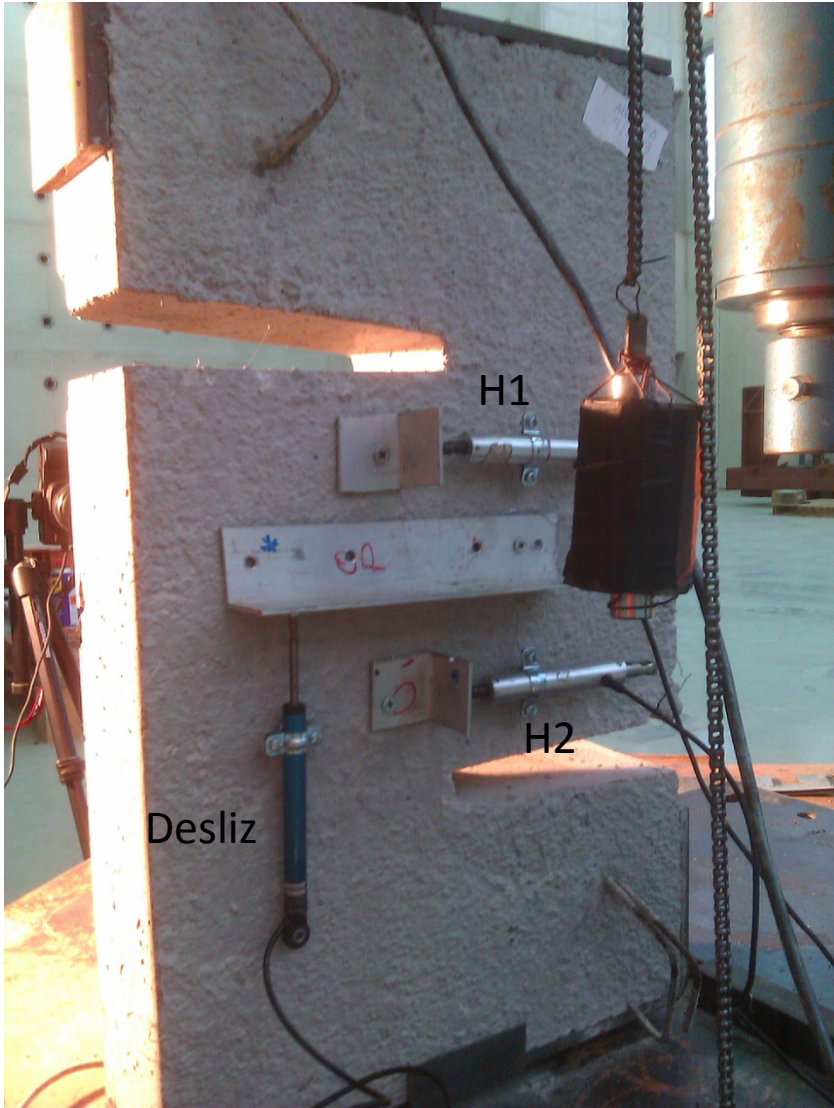


# COMPARATIVA DEFORMACIONES DEMEC - FOTO

- 1° Elemento demec
- 1° Elemento foto
- 2° Elemento demec
- 2° Elemento foto
- 3° Elemento demec
- 3° Elemento foto

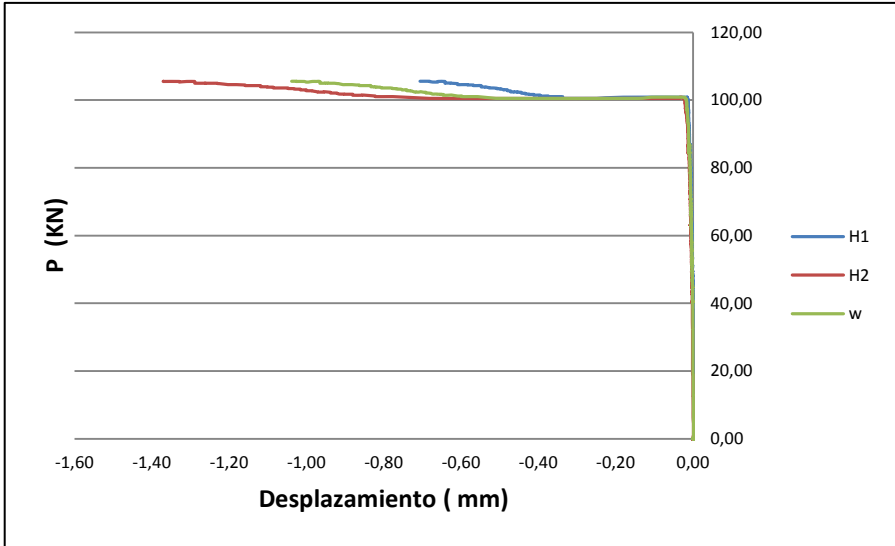


# TRANSDUCTORES: DESPLAZAMIENTOS

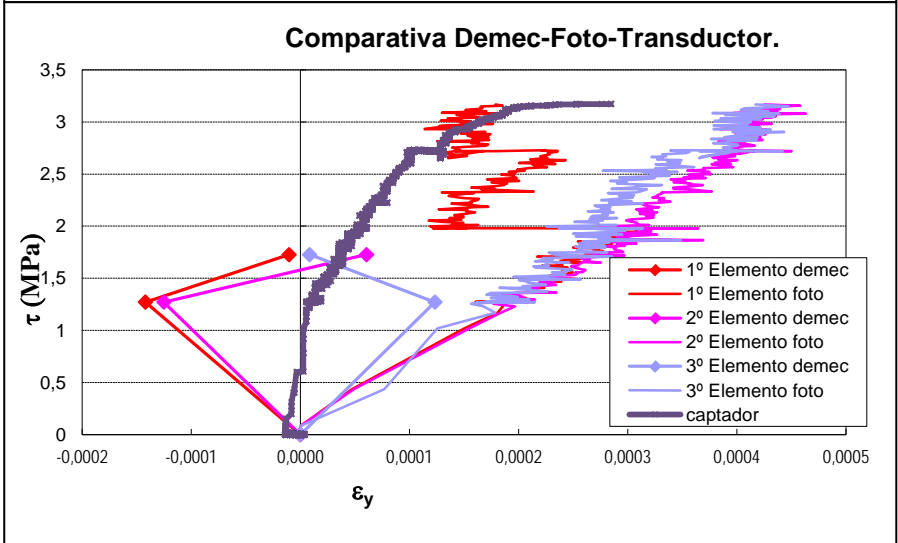
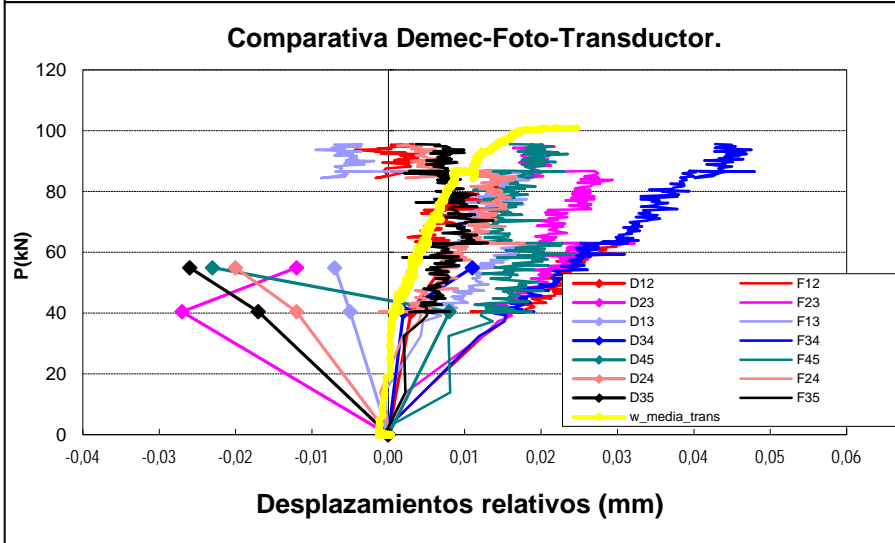
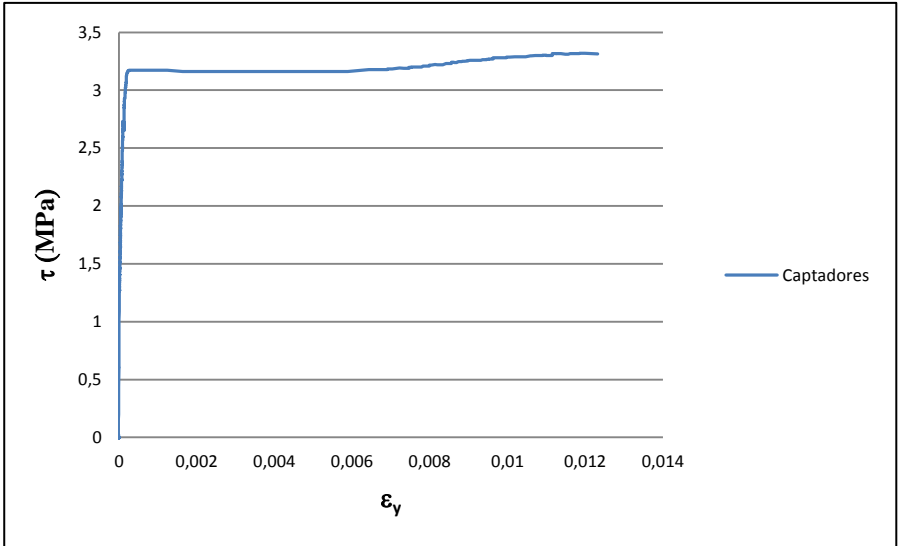


# TRANSDUCTORES

## DESPLAZAMIENTOS



## DEFORMACIONES



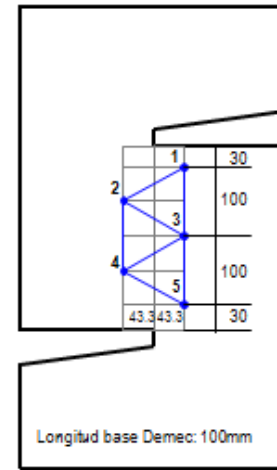
10 Probeta Z-HF-0FI8-NF-2.

# DESPLAZAMIENTOS

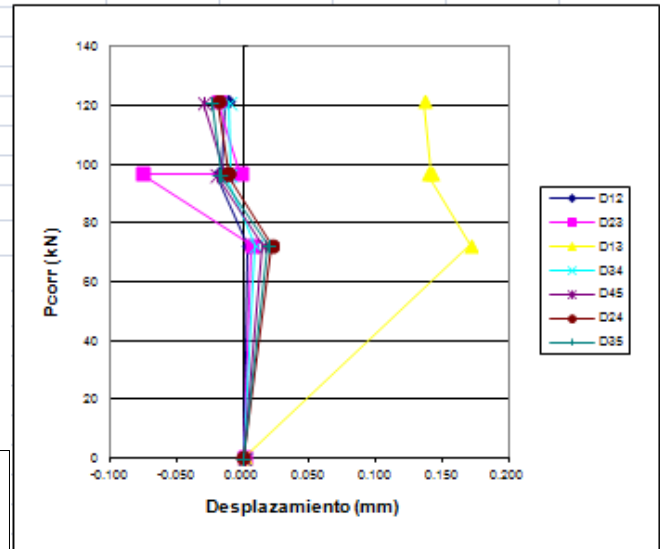
## Mediciones DEMEC

Probeta: Z-HF-0F18-NF-2  
 Fecha: 22/02/2013

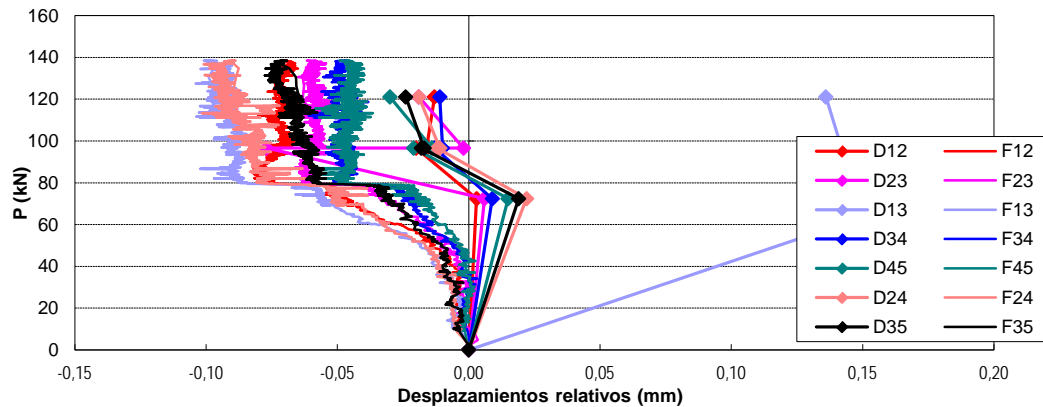
P (T)	Pcorregida	$\Delta 12$ (mm)	$\Delta 23$ (mm)	$\Delta 13$ (mm)	$\Delta 34$ (mm)	$\Delta 45$ (mm)	$\Delta 24$ (mm)	$\Delta 35$ (mm)
0	0	-0.109	-0.479	-1.645	-0.759	-0.724	-1.358	-1.138
6	72.401323	-0.106	-0.473	-1.474	-0.750	-0.709	-1.336	-1.119
8	96.561746	-0.129	-0.556	-1.506	-0.772	-0.745	-1.370	-1.156
8	96.561746	-0.125	-0.481	-1.503	-0.769	-0.738	-1.369	-1.155
10	121.10232	-0.122	-0.498	-1.509	-0.770	-0.754	-1.377	-1.162



P (kN)	Pcorregida	$\Delta 12rel$ (mm)	$\Delta 23rel$ (mm)	$\Delta 13rel$ (mm)	$\Delta 34rel$ (mm)	$\Delta 45rel$ (mm)	$\Delta 24rel$ (mm)	$\Delta 35rel$ (mm)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
60	72.401323	0.003	0.006	0.171	0.009	0.015	0.022	0.019
80	96.561746	-0.020	-0.077	0.139	-0.013	-0.021	-0.012	-0.018
80	96.561746	-0.016	-0.002	0.142	-0.010	-0.014	-0.011	-0.017
100	121.10232	-0.013	-0.019	0.136	-0.011	-0.030	-0.019	-0.024

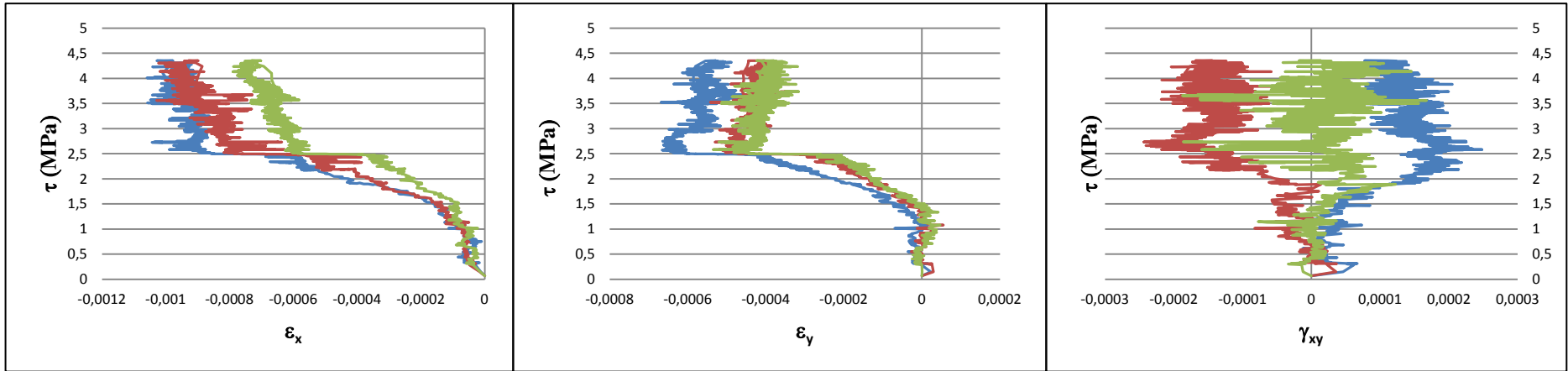


### Comparación DEMEC- Fotogrametría:



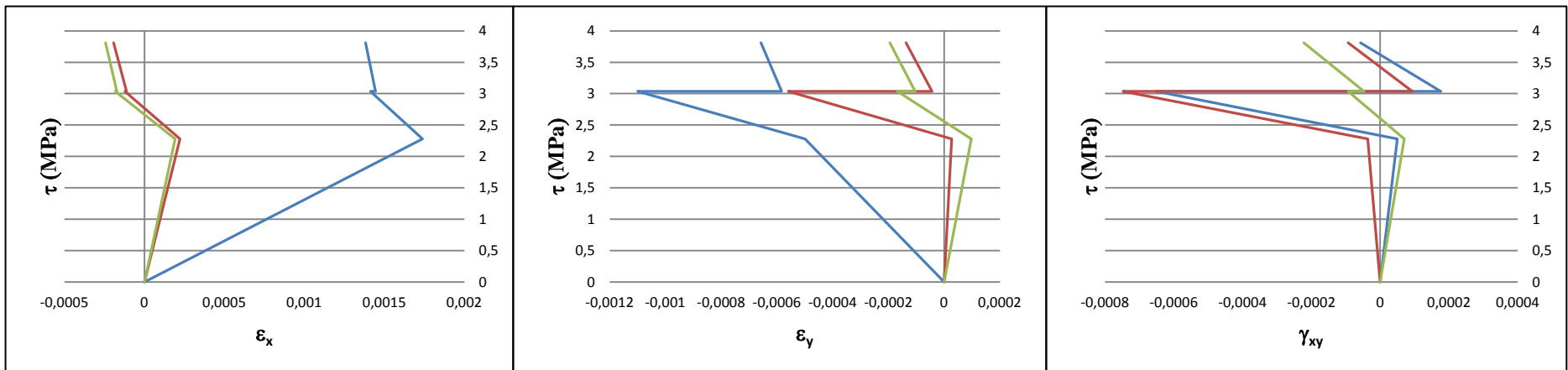
## DEFORMACIONES FOTOGRAMETRÍA

- 1º ELEMENTO
- 2º ELEMENTO
- 3º ELEMENTO



## DEFORMACIONES MEDICIONES DEMEC

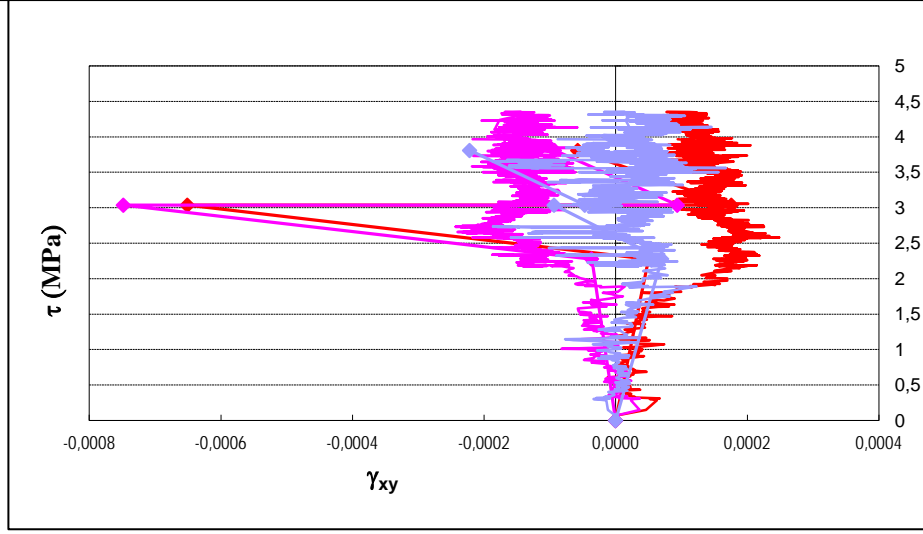
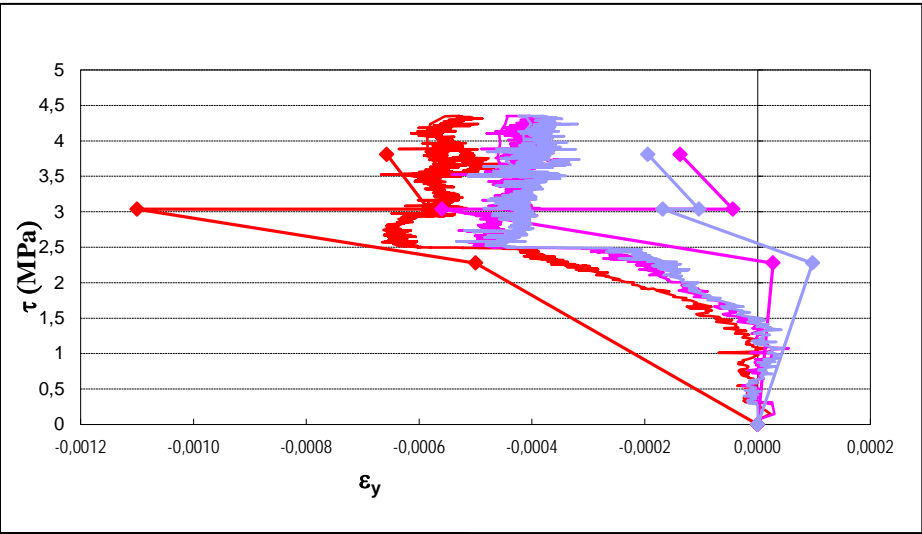
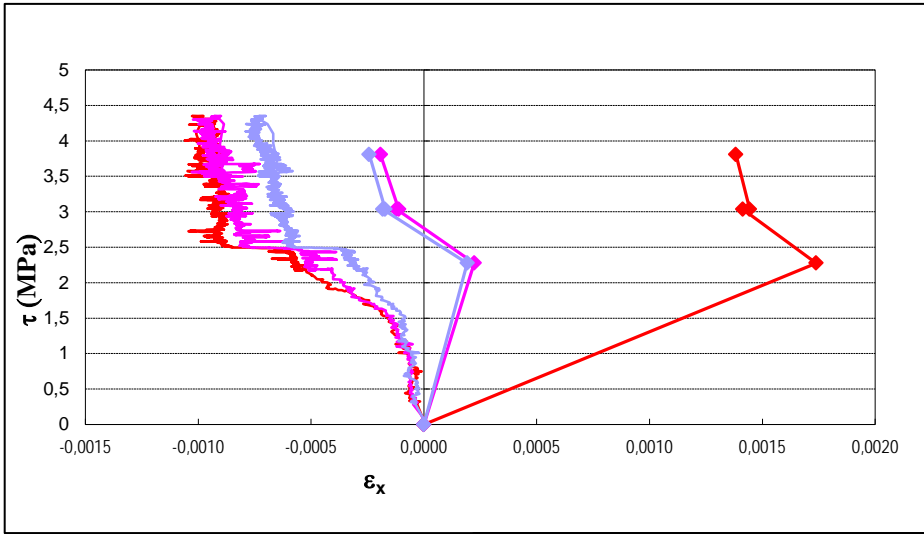
- 1º ELEMENTO
- 2º ELEMENTO
- 3º ELEMENTO



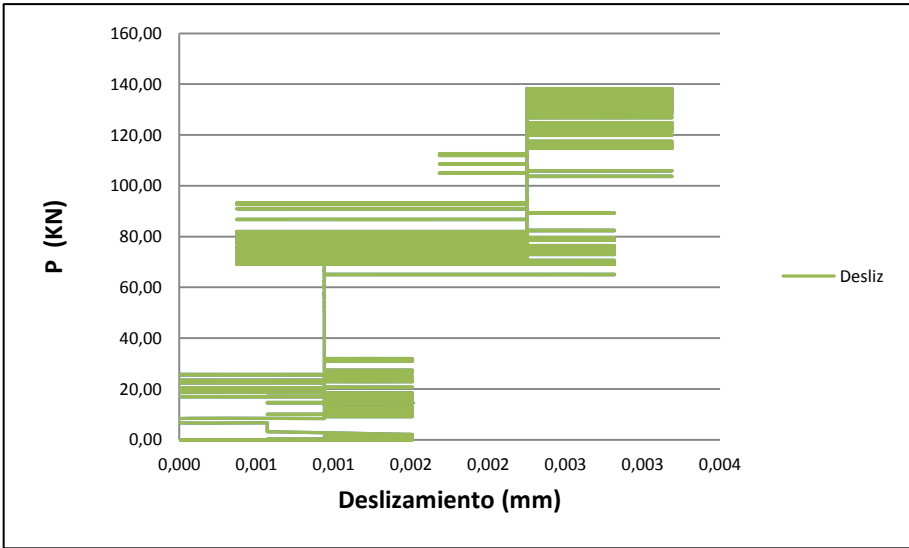
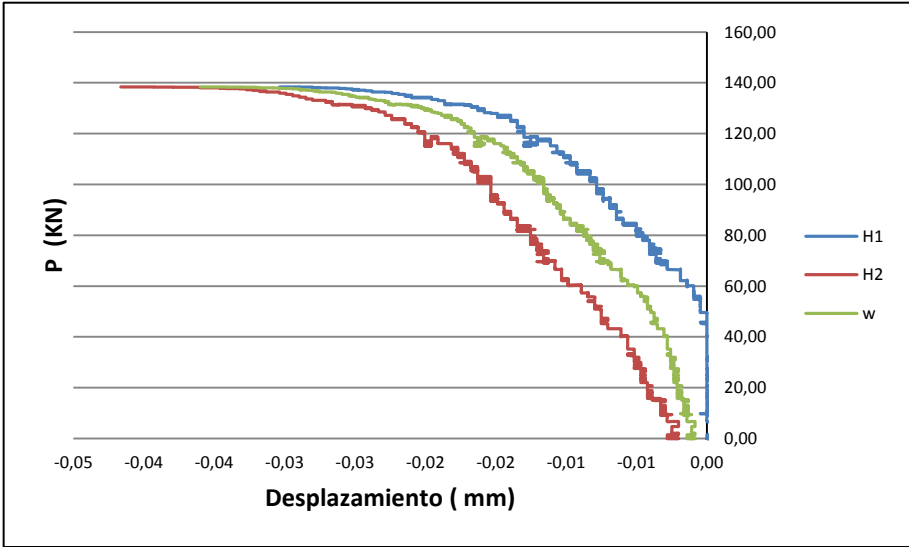
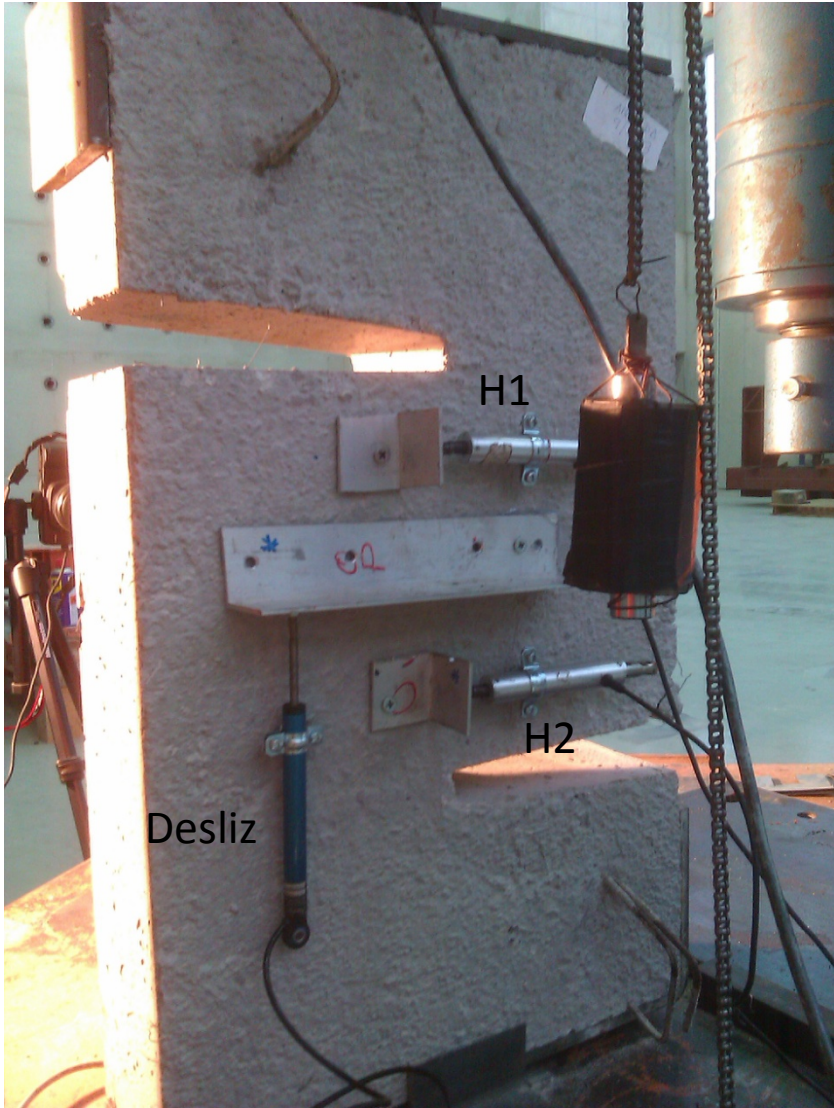


# COMPARATIVA DEFORMACIONES DEMEC - FOTO

- 1° Elemento demec
- 1° Elemento foto
- 2° Elemento demec
- 2° Elemento foto
- 3° Elemento demec
- 3° Elemento foto

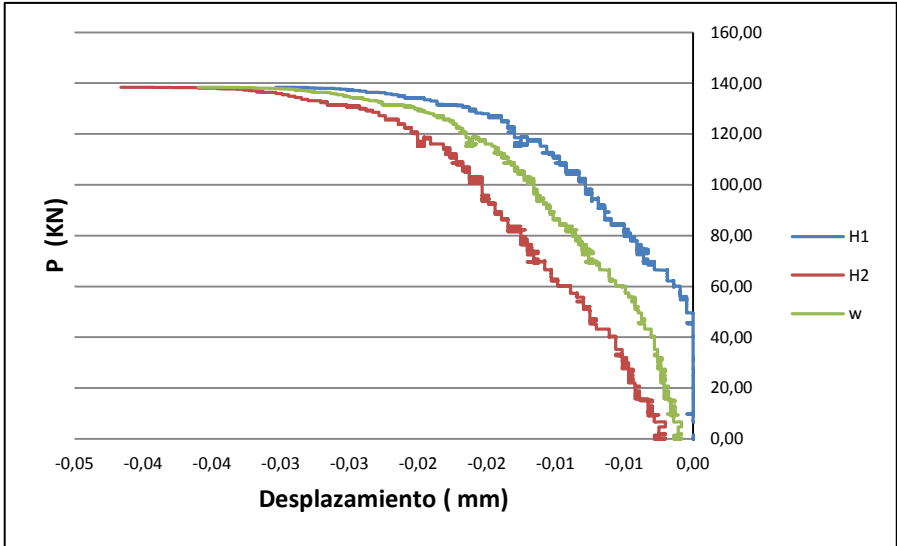


# TRANSDUCTORES: DESPLAZAMIENTOS

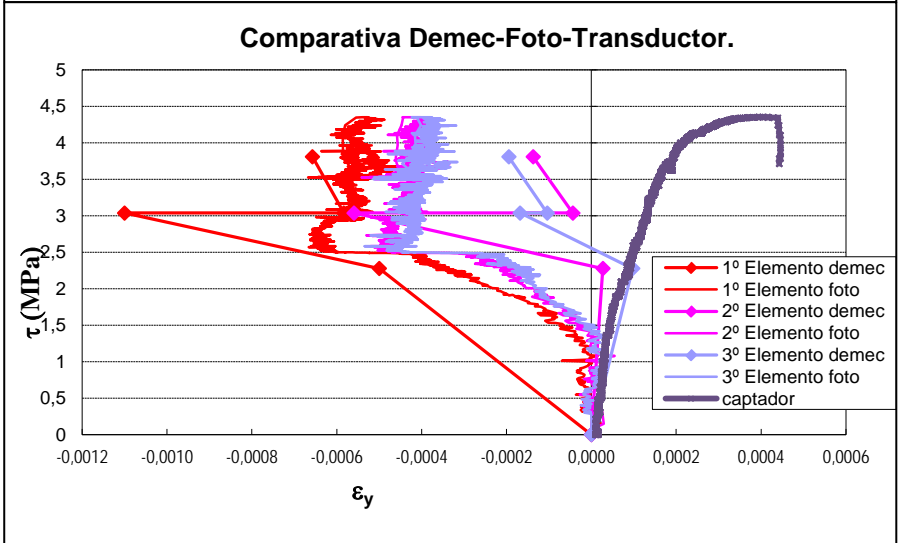
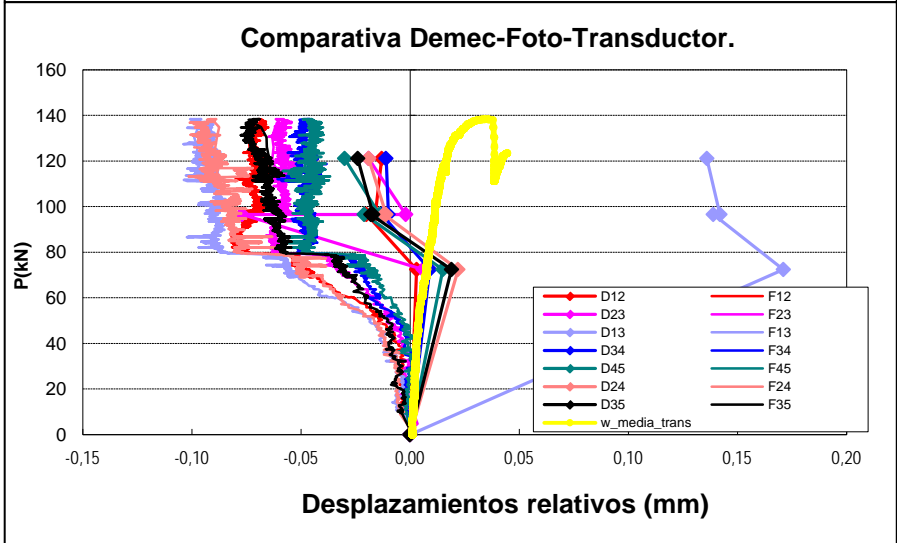
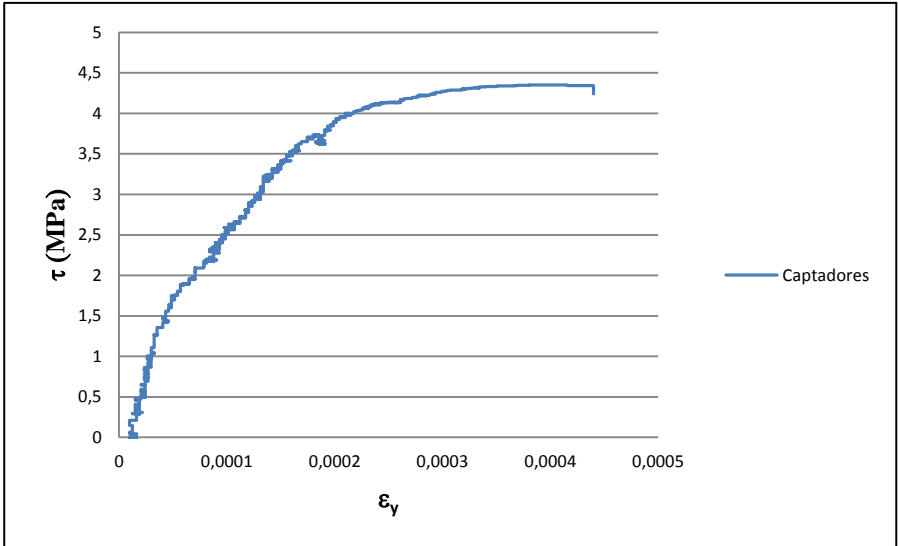


# TRANSDUCTORES

## DESPLAZAMIENTOS



## DEFORMACIONES





## Anejo B:

# Material DSFM

La formulación del material *DSFM* se lleva a cabo según Vecchio [27].

### **Introducción al modelo [27]:**

El desarrollo de procedimientos elásticos y no lineales en el análisis del hormigón armado por medio de elementos finitos, generalmente se ha venido desarrollando a través de dos líneas: modelos de fisuración rotativa y modelos de fisuración fija. En los modelos de fisuración rotativa se asume que se produce una reorientación gradual en la dirección de las fisuras influenciada por el modo de carga de la estructura o por la respuesta del propio material. Junto con el cambio producido en la dirección de las fisuras, tiene lugar una reorientación gradual en la dirección principal de tensiones y en la dirección principal de deformaciones del hormigón. Por el contrario, con los modelos de fisuración fija, las direcciones de las fisuras permanecen fijas siguiendo la dirección de aparición de la primera fisura. Un aspecto importante a tener en cuenta en los modelos de fisuración fija es la determinación de las tensiones tangenciales que necesariamente se desarrollan en la superficie de las fisuras y el deslizamiento por cortante que se produce como consecuencia de ello.

Hace unos treinta años, se propuso *The Modified Compression Field Theory (MCFT)* [23] para describir el comportamiento del hormigón fisurado en elementos sujetos a cargas en su plano. Esencialmente se trata de un modelo de fisuración rotativa distribuida que representa el hormigón como un material ortotrópico. El equilibrio, la compatibilidad y las relaciones tensión-deformación se formulan utilizando los valores de tensiones y deformaciones en términos medios.

El *MCFT* refleja la observación de que el hormigón fisurado, cuando está sujeto simultáneamente a elevadas deformaciones de tracción en la dirección normal a la compresión, manifiesta una resistencia y una rigidez reducidas con respecto al hormigón no fisurado comprimido de forma uniaxial. Este método propone, además, una formulación basada en la rigidización por tracción ("*tensión de stiffening*") para representar la presencia y la influencia de la resistencia media a tracción que tiene lugar en el hormigón entre fisuras una vez se ha producido la fisuración.

Está demostrado que el *MCFT* proporciona predicciones consistentemente fiables de la resistencia, respuesta carga-deformación y modo de fallo con aceptable exactitud en la mayoría de los contextos ingenieriles. No obstante la experiencia revela algunas deficiencias de precisión y fiabilidad del modelo en situaciones específicas como pueden ser las zonas donde hay una alta concentración de armado en ambas direcciones o zonas donde hay poca concentración de armado en la dirección transversal.

El *MCFT* asume la simplificación de que las direcciones de las deformaciones principales medias coinciden con las direcciones de las tensiones principales medias en el hormigón. Se demuestra de forma experimental que esto no es necesariamente así. La tendencia observada es que las variaciones que se producen en la dirección principal de tensiones llevan un cierto retraso con respecto a las variaciones que se producen en la dirección principal de deformaciones, tal y como se muestra en la figura B.1.

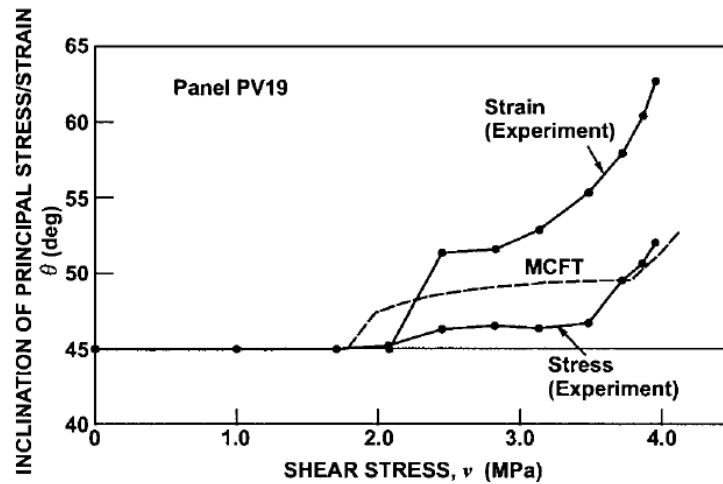


Figura B.1: Desviación de la dirección principal de las tensiones frente a la dirección principal de las deformaciones [27].

Dado que el patrón observado (ver figura B.1) es el de que la reorientación de las direcciones de las tensiones y las deformaciones parece estar relacionada y no es muy diferente y, dada la simplificación que ello confiere a los aspectos computacionales del método, se decide hacer la simplificación en el *MCFT* (anteriormente mencionada) de coaxialidad entre tensiones y deformaciones. Es esta simplificación la que da lugar a las inexactitudes del modelo en los casos mencionados anteriormente.

Otra dificultad que presenta el *MCFT* surge de la verificación de la fisura por cortante. Se asume que la dirección de las fisuras en el hormigón está alineada con la dirección de las tensiones principales medias; así que, la media de las tensiones tangenciales en las direcciones ortogonales a las fisuras son necesariamente cero. No obstante, en la superficie de las fisuras, las condiciones tensionales locales son diferentes y pueden dar lugar a tensiones tangenciales distintas de cero en dicha zona. El *MCFT* comprueba la magnitud de estas tensiones locales; si dichas tensiones exceden un valor límite, se realiza una reducción de la magnitud de la media de las tensiones de tracción que pueden ser resistidas. En realidad, la relación entre las tensiones de tracción del hormigón y las tensiones tangenciales localizadas no es directa. Además, aunque las tensiones tangenciales puedan ser generadas en la superficie de la fisura, las relaciones de compatibilidad del *MCFT* no las tienen en cuenta para el deslizamiento por cortante a lo largo de la fisura. Por último, la comprobación a cortante de las fisuras representa una complejidad computacional demasiado elevada en relación con la simplicidad del resto de la formulación. La comprobación a cortante de la fisura ha sido el aspecto menos entendido y más ignorado en la implementación del *MCFT*, aunque esto debería ser un componente relativamente importante en el modelo.

*The Disturbed Stress Field Model (DSFM)*, que es el modelo que se usa aquí, intenta corregir las dos debilidades más importantes del modelo computacional del *MCFT*: el forzado alineamiento de las direcciones de las tensiones principales y las deformaciones principales y la consideración de las tensiones de corte (tensiones tangenciales) en las fisuras. Con el *DSFM* se demuestra que una consideración más comprensiva de estos mecanismos ayuda a reducir las inexactitudes sistemáticas que se obtienen en el *MCFT* bajo determinadas circunstancias. No obstante, el *MCFT* sigue siendo un simple pero poderoso modelo computacional aplicable con suficiente exactitud en la mayoría de las situaciones que se pueden dar en la práctica.

### Modelo conceptual [27].

Se considera un elemento estructural de hormigón armado que haya fisurado como resultado de la aplicación de unas cargas externas, tal y como se muestra en la figura B.2.

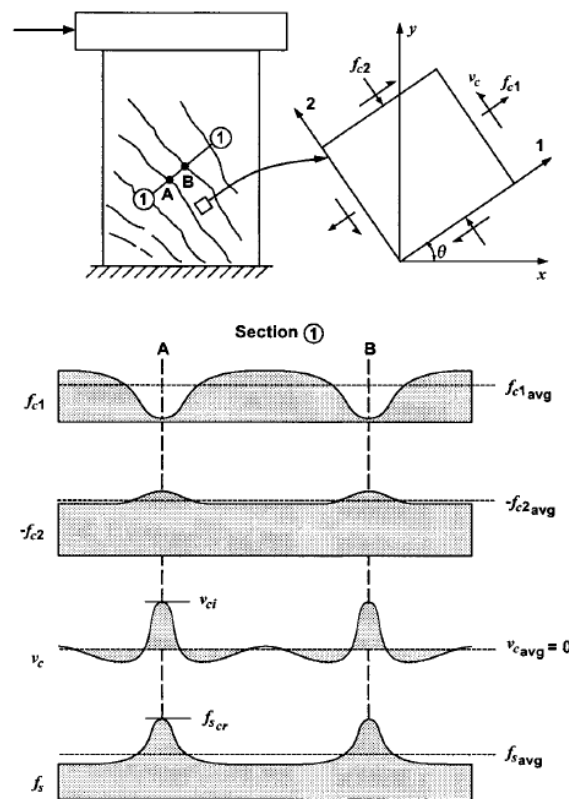


Figura B.2: Naturaleza del DSFM en hormigón armado y fisurado [27].

Las tensiones de tracción en el hormigón  $f_{c1}$  se aproximan a cero en la zona donde están situadas las fisuras y son mayores que cero en la zona entre fisuras debido al fenómeno de la *tensión de stiffening* y otros mecanismos. Para compensar la reducción de la tensión de tracción del hormigón en las fisuras, las tensiones en las armaduras  $f_s$  se verán incrementadas para mantener el equilibrio tensional. Si el armado atraviesa las fisuras con cierta inclinación, las tensiones locales incrementadas en el armado darán lugar a tensiones tangenciales en la superficie de las fisuras  $\nu_c$ . No obstante, como los ejes de referencia 1-2 representan la orientación de las tensiones principales medias, la media de las tensiones tangenciales en el hormigón debe ser, necesariamente, cero. Finalmente, las tensiones de compresión en el hormigón  $f_{c2}$  se ven incrementadas, en cierto modo, cerca de las fisuras debido al mecanismo

de engranamiento de los áridos y a las condiciones de equilibrio. Por tanto, es conveniente considerar el mecanismo interno de resistencia en términos de campos de tensiones medias, pero aceptando que dichos campos están perturbados por la presencia de las fisuras.

Respecto a las tensiones tangenciales locales distintas de cero que aparecen en la interface de las fisuras, se asume que se produce un cierto grado de deslizamiento de sólido rígido a lo largo de la fisura. Esta deformación localizada debe ser considerada como una adición a la media de las deformaciones resultado de la respuesta constitutiva del hormigón a la media de las tensiones. La inclusión de dichas deformaciones por deslizamiento da como resultado una desviación entre la orientación de la media de las tensiones principales y la media de las deformaciones principales aparentes en el hormigón.

**Condiciones de equilibrio [27].**

Tal y como se muestra en la figura B.3, se considera un elemento de hormigón armado sujeto a tensiones uniformes,  $[\sigma] = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ , aplicadas a lo largo de los límites. Este elemento está armado con un número de armaduras orientadas con ángulos arbitrarios respecto a los ejes de referencia del elemento. Se considera que el armado está extendido y uniformemente distribuido dentro del elemento. El problema que se plantea es el de calcular el comportamiento resultante del elemento, incluyendo la respuesta tensión-deformación, los patrones de fisurado, las tensiones internas y el modo de rotura.

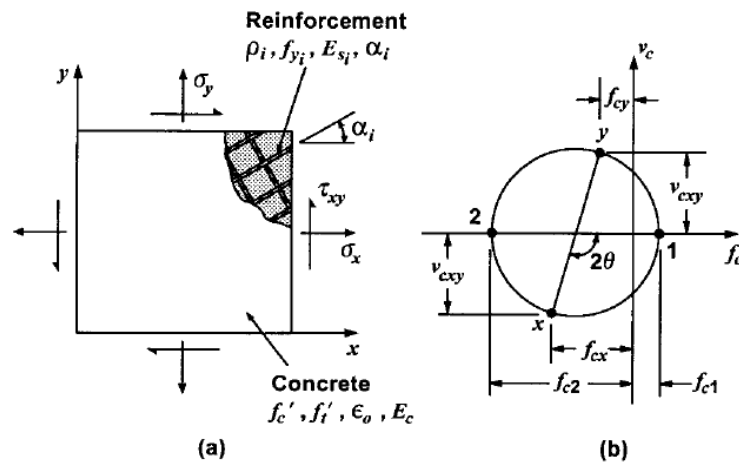


Figura B.3: Elemento de hormigón armado: (a) Armado y condiciones de carga; (b) Círculo de Mohr para la media de las tensiones en el hormigón [27].

Las fuerzas aplicadas en el elemento son resistidas por las tensiones internas inducidas en el hormigón y en el armado. En este contexto, es necesario examinar las condiciones de equilibrio en el elemento en dos niveles: en términos de media de tensiones extendidas sobre el área del elemento y en términos de condiciones locales a lo largo de las superficies de las fisuras.

Para la formulación de las matrices de rigidez en el análisis mediante elementos finitos o para el desarrollo de las relaciones de equilibrio explícitas para el propio análisis o los procedimientos de diseño, es conveniente relacionar la media de las tensiones con la media de las deformaciones. Para ello, el hormigón es considerado como un material ortotrópico con



fisuración rotativa; de este modo, la media de las tensiones principales  $f_{c2}$  y  $f_{c1}$  permanecen paralelas y perpendiculares, respectivamente, respecto a la dirección de las fisuras definida por el ángulo  $\theta$ , como se puede ver en la figura B.4 (a). Hay que destacar que la media de las tensiones principales de tracción en el hormigón  $f_{c1}$  se tienen igualmente en cuenta después de la fisuración, debido a los mecanismos de reblandecimiento y de *tensión de stiffening*. Además, también se deben considerar las medias de tensiones actuando en el armado; para la armadura  $i$ , la media de las tensiones se representa como  $f_{s_i}$ . Estas condiciones de tensiones medias se representan en las figuras B.4 (b y c).

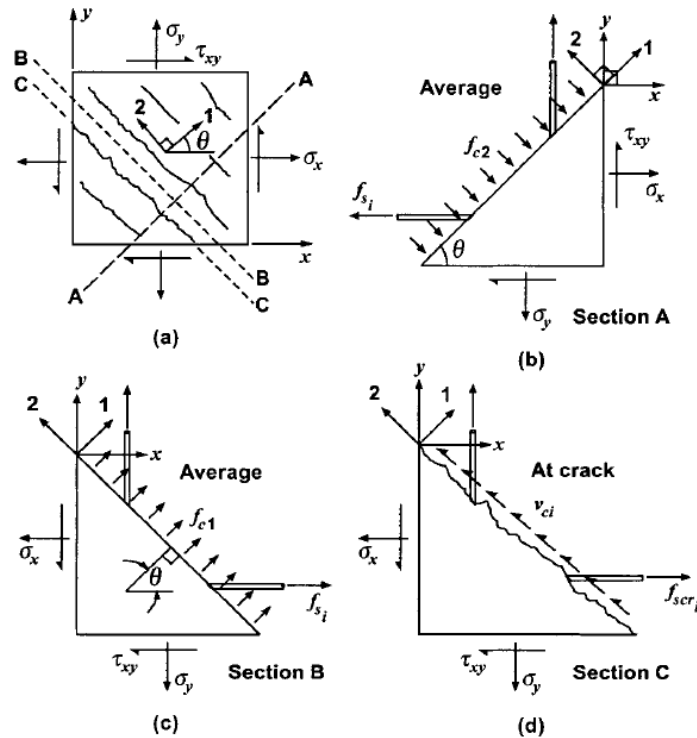


Figura B.4: Condiciones de equilibrio: (a) Condiciones externas; (b) Paralelas a la dirección de las fisuras; (c) Perpendiculares a dirección de las fisuras; (d) a lo largo de la superficie de la fisura [27].

De este modo las condiciones de equilibrio vienen representadas como:

$$[\sigma] = [D_c][\varepsilon_c] + \sum_{i=1}^n [D_s]_i [\varepsilon_s]_i \quad (B.1)$$

donde  $n$  = número de barras de armado;  $[D_c]$  y  $[D_s]_i$  = matrices de rigidez del hormigón y del acero del armado, respectivamente;  $[\varepsilon_c]$  y  $[\varepsilon_s]_i$  = red de deformaciones en el hormigón y en el acero de armado, respectivamente. Para el caso concreto en el que el elemento está ortogonalmente armado y, a su vez, alineado con los ejes de referencia, las ecuaciones de equilibrio quedan representadas como:

$$\sigma_x = f_{cx} + \rho_x \cdot f_{sx} \quad (B.2)$$

$$\sigma_y = f_{cy} + \rho_y \cdot f_{sy} \quad (B.3)$$

$$\tau_{xy} = v_{cxy} \quad (B.4)$$

Las tensiones del hormigón  $f_{cx}$ ,  $f_{cy}$  y  $v_{xy}$  se pueden obtener usando el círculo de Mohr de tensiones, tal y como se muestra en la figura B.3(b).

Se asumirá que la componente de tensión principal de tracción en el hormigón debido a la *tensión de stiffening* es cero en la posición de la fisura. Para transmitir la media de las tensiones  $f_{c1}$  será necesario considerar incrementos locales de tensiones en las armaduras. Estas tensiones locales se representan como  $f_{scri}$ , tal y como se muestra en la figura B.4(d). La magnitud de  $f_{c1}$  que puede ser transmitida mediante este mecanismo viene limitada por la reserva de capacidad del armado, la cual viene dada por la diferencia entre la media de tensiones y la tensión de plastificación. De este modo:

$$f_{c1} \leq \sum_{i=1}^n \rho_i (f_{yi} - f_{si}) \cdot \cos^2 \theta_{ni} \quad (B.5)$$

donde  $\rho_i$  = cuantía de armado;  $f_{si}$  = media de tensiones en el acero;  $f_{yi}$  = tensión de plastificación para la armadura  $i$ ;  $\theta_{ni}$  = diferencia entre el ángulo de orientación del armado,  $\alpha_i$ , y la normal a la superficie de la fisura  $\theta$ :

$$\theta_{ni} = \theta - \alpha_i \quad (B.6)$$

Las tensiones locales del armado  $f_{scri}$  se determinan a partir de las deformaciones locales del armado  $\varepsilon_{scri}$ . Estas tensiones locales en el armado deben satisfacer la condición de equilibrio según la cual la media de las tensiones de tracción en el hormigón son transmisibles a lo largo de las fisuras, es decir:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i (f_{yi} - f_{si}) \cdot \cos^2 \theta_{ni} = f_{c1} \quad (B.7)$$

Los incrementos locales de las tensiones en el armado, en la posición de las fisuras, conducen al desarrollo de tensiones tangenciales a lo largo de las superficies de las fisuras  $v_{ci}$ . Las condiciones de equilibrio dan lugar a la siguiente expresión:

$$v_{ci} = \sum_{i=1}^n \rho_i (f_{scri} - f_{si}) \cdot \cos \theta_{ni} \cdot \sin \theta_{ni} \quad (B.8)$$

### Relaciones de compatibilidad [27].

Se considera las condiciones de compatibilidad en un elemento de hormigón armado compuestas por las deformaciones continuas y los deslizamientos discontinuos a lo largo de las superficies de las fisuras, como se muestra en la figura B.5:

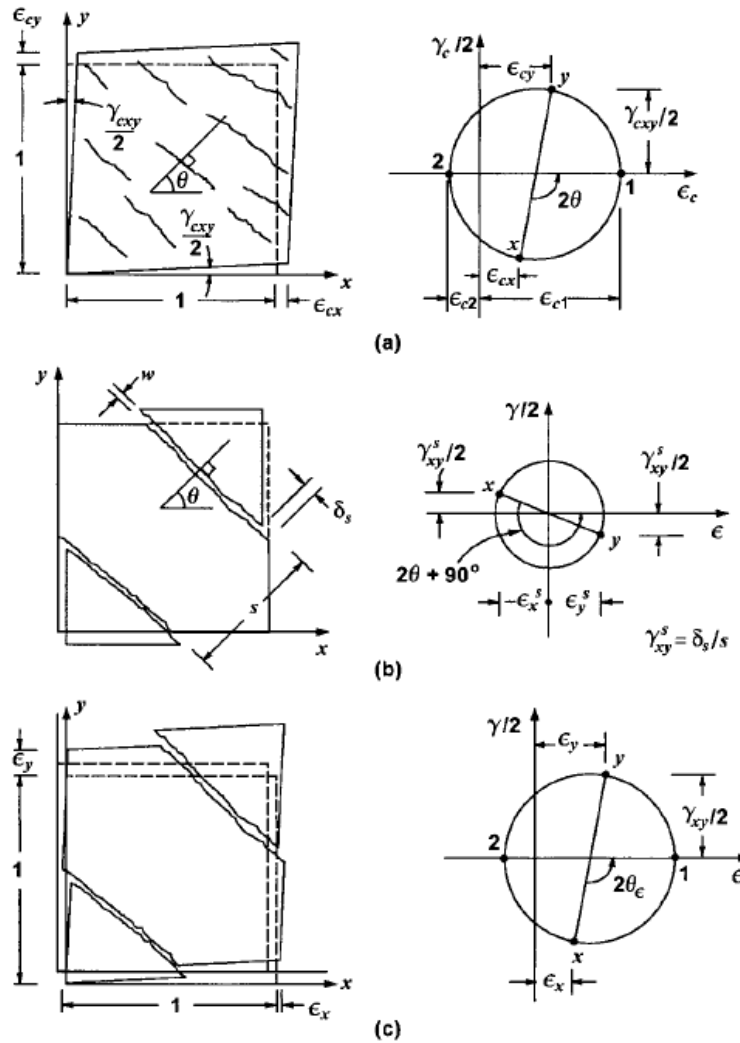


Figura B.5: Condiciones de compatibilidad: (a) Deformaciones debido a la respuesta constitutiva media (extendida); (b) Deformaciones debidas al deslizamiento de sólido rígido a lo largo de la fisura; (c) Deformaciones combinadas [27].

Las deformaciones continuas son el resultado de la conformidad mecánica entre la tensión y la extensión de los anchos de las fisuras sobre un área finita. La componente de deslizamiento es el resultado de un movimiento de sólido rígido a lo largo de la interface de la fisura. Relativo a un sistema de referencia x-y, las deformaciones medidas contienen, intrínsecamente, los dos componentes de deformación antes mencionados. Estas deformaciones medidas (totales) o "aparentes" se representan con  $[\epsilon] = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}\}$ . La inclinación aparente de las deformaciones principales  $\theta_\epsilon$  se calcula como:

$$\theta_\epsilon = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \right] \quad (B.9)$$

Desacoplando los dos efectos deformacionales, la red de deformaciones finales dentro del continuo vendrá denotada como  $[\epsilon_c] = \{\epsilon_{cx} \ \epsilon_{cy} \ \gamma_{cxy}\}$ . Las deformaciones principales se obtienen a partir de la red de deformaciones usando las transformaciones estándar:

$$\epsilon_{c1}, \epsilon_{c2} = \frac{(\epsilon_{cx} + \epsilon_{cy})}{2} \pm \frac{1}{2} \left[ (\epsilon_{cx} - \epsilon_{cy})^2 + \gamma_{cxy}^2 \right]^{1/2} \quad (B.10)$$

La inclinación final de las deformaciones principales en el continuo  $\theta$  y la inclinación adoptada para las tensiones principales será:

$$\theta_\sigma = \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ \frac{\gamma_{cxy}}{\varepsilon_{cx} - \varepsilon_{cy}} \right] \quad (B.11)$$

Se considera, ahora, el deslizamiento discreto que ocurre a lo largo de las superficies de las fisuras (ver figura B.5(b)). Se asume que las fisuras están inclinadas en la dirección de la red de deformaciones principales de tracción  $\theta$ , que las fisuras tienen un ancho medio y una separación de  $w$  y  $s$ , respectivamente, y que el deslizamiento a lo largo de la superficie de la fisura tiene una magnitud de  $\delta_s$ . Se puede definir una distorsión angular media debida al cortante por deslizamiento como sigue:

$$\gamma_s = \frac{\delta_s}{s} \quad (B.12)$$

Usando la construcción del Círculo de Mohr, la distorsión angular antes mencionada puede relacionarse con las componentes ortogonales relativas al sistema de referencia:  $[\varepsilon^s] = \{\varepsilon_x^s, \varepsilon_y^s, \gamma_{xy}^s\}$  como sigue:

$$\varepsilon_x^s = -\frac{\gamma_s}{2} \cdot \sin(2\theta) \quad (B.13)$$

$$\varepsilon_y^s = \frac{\gamma_s}{2} \cdot \sin(2\theta) \quad (B.14)$$

$$\gamma_{xy}^s = \frac{\gamma_s}{2} \cdot \cos(2\theta) \quad (B.15)$$

Además de esto, el elemento puede experimentar deformaciones debido a compensaciones elásticas o plásticas. Las deformaciones por compensación elástica  $[\varepsilon_c^0]$  incluyen efectos debidos a la expansión térmica, expansión mecánica (por ejemplo el efecto Poisson y los áridos alcalinos reactivos) y contracción. Las deformaciones por compensación plástica  $[\varepsilon_c^p]$  surgen de las condiciones de carga cíclica o cargas en niveles post-pico. Las deformaciones aparentes (totales) son el sumatorio las deformaciones inducidas por las tensiones en el continuo., las distorsiones angulares debidas al cortante y las deformaciones por compensación tanto elástica como plástica. De este modo se obtienen las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_c] + [\varepsilon^s] + [\varepsilon_c^0] + [\varepsilon_c^p] \quad (B.16)$$

La diferencia entre la rotación de las tensiones principales en el continuo respecto de la rotación de las deformaciones principales aparentes, viene definida por:

$$\Delta\theta = \theta_\varepsilon - \theta_\sigma \quad (B.17)$$

La condición de deformación aparente se relaciona también con la orientación final de las tensiones y las deformaciones en el continuo como sigue:

$$\gamma_s = \gamma_{xy} \cdot \cos 2\theta_\sigma + (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cdot \sin 2\theta_\sigma \quad (B.18)$$

Se asume una condición de adherencia perfecta entre la armadura y el hormigón. Por tanto, la deformación media en un componente del armado se calcula, con respecto a la deformación total, como sigue:

$$\varepsilon_{si} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\alpha_i + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\alpha_i + \varepsilon_{si}^0 \quad (\text{B.19})$$

donde  $\alpha_i$  = ángulo de orientación del armado; y  $\varepsilon_{si}^0$  = predeformación inicial en el armado. En la posición de las fisuras, las tensiones y deformaciones locales en el armado se ven incrementadas para compensar la reducción local en la media de tensiones de tracción del hormigón. Se asume la presencia de un incremento de la deformación local  $\Delta\varepsilon_{1cr}$  en la dirección principal de tensión para satisfacer la condición de equilibrio representada por (7). La deformación local en el armado será:

$$\varepsilon_{scri} = \varepsilon_{si} + \Delta\varepsilon_{1cr} \cdot \cos^2 \theta_{ni} \quad (\text{B.20})$$

Dada una separación entre fisuras en las direcciones de referencia  $x$  e  $y$ ,  $s_x$  y  $s_y$ , la separación media en el continuo fisurado puede ser estimada como:

$$S = \frac{1}{\frac{\sin \theta}{s_x} + \frac{\cos \theta}{s_y}} \quad (\text{B.21})$$

Los valores de  $s_x$  y  $s_y$  pueden ser estimados a partir de las formulaciones estándar de separación de fisura. A partir de la separación media entre fisuras, la abertura media de fisura  $w$  puede obtenerse a partir de la deformación media de tracción como sigue:

$$w = \varepsilon_{c1} \cdot S \quad (\text{B.22})$$

### Relaciones constitutivas [27].

La tensión principal de compresión en el hormigón  $f_{c2}$  está en función tanto de la deformación principal de compresión como de la deformación principal de tracción coexistente. Esta influencia va condicionada por el factor de reducción  $\beta_d$  como sigue:

$$\beta_d = \frac{1}{1 + C_s \cdot C_d} \leq 1.0 \quad (\text{B.23})$$

donde:

$$C_d = 0.35 \left( -\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c2}} - 0.28 \right)^{0.8} \quad (\text{B.24})$$

también se puede usar:

$$C_d = 0.27 \left( \frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_0} - 0.37 \right) \quad (\text{B.25})$$

esta última expresión es más fácil de implementar en los procesos de diseño y, además, la precisión no se ve reducida cuando se usa una forma simple en función de  $\varepsilon_{c1}$  solamente.

El factor  $C_s$  hace referencia a la influencia del deslizamiento en las fisuras. Si el deslizamiento es tenido en cuenta, entonces el índice de reblandecimiento por compresión debido a la fisuración transversal debe ser reducido para compensar las mayores

deformaciones "aparentes" obtenidas. Según [27], para el *DSFM* se puede usar  $C_s = 0.55$ . Si el deslizamiento entre fisuras no se tiene en cuenta de forma explícita en las relaciones de compatibilidad del elemento, como ocurre con el *MCFT*, se usa  $C_s = 1.0$ .

El factor  $\beta_d$  se usa para definir tanto el pico de tensiones  $f_p$  como la deformación cuando se produce el pico de tensiones  $\varepsilon_p$  en la respuesta a compresión del hormigón. De este modo, usando la formulación de  $\varepsilon_{c1}/\varepsilon_{c2}$ :

$$f_p = -\beta_d \cdot f'_c \tag{B.26}$$

$$\varepsilon_p = -\beta_d \cdot \varepsilon_0 \tag{B.27}$$

si se usa la formulación de  $\varepsilon_{c1}/\varepsilon_{c2}$ , entonces  $\varepsilon_p = -\varepsilon_0$  (notar que tanto  $\varepsilon_p$  como  $f_p$  son cantidades negativas). Según *Vecchio and Collins 1993*, una curva de respuesta a compresión adecuada vendría dada por la expresión:

$$f_{c2} = f_p \cdot \frac{n \cdot (\varepsilon_{c2}/\varepsilon_p)}{(n-1) + (\varepsilon_{c2}/\varepsilon_p)^{nk}} \tag{B.28}$$

donde:

$$n = 0.80 - \frac{f_p}{17} \tag{B.29}$$

$$k = 1.0, \quad \varepsilon_p < \varepsilon_{c2} < 0; \quad k = \left(0.67 - \frac{f_p}{62}\right), \quad \varepsilon_{c2} < \varepsilon_p \tag{B.30a,b}$$

Viendo en la figura B.6(a) la respuesta a compresión se asume que decae a 0 cuando el ancho de fisura llega a 5mm.

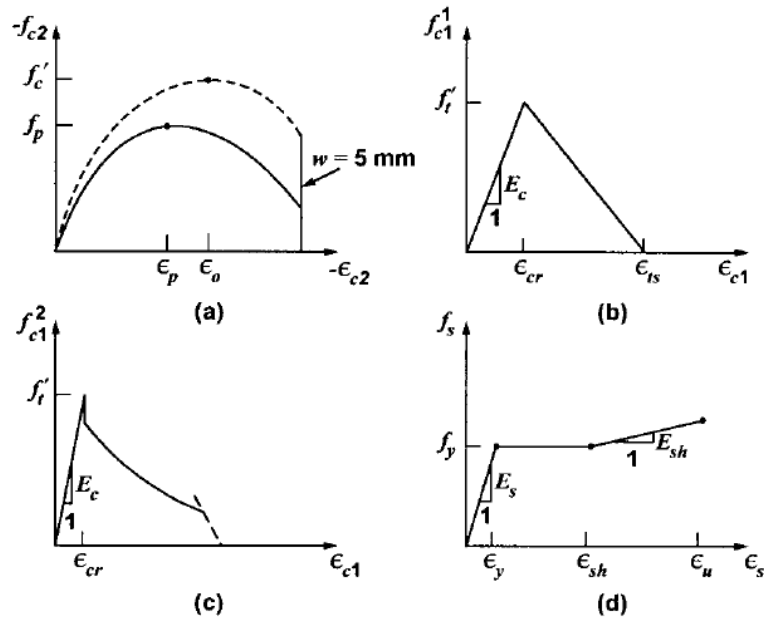


Figura B.6: Relaciones constitutivas: (a) Modelo de reblandecimiento por compresión; (b) Modelo de reblandecimiento por tracción; (c) Modelo de tracción de Stiffening; (d) Respuesta del armado de acero [27].

Para el hormigón en tracción, antes de la fisuración, se usa la siguiente relación lineal:

$$f_{c1} = E_c \varepsilon_{c1}, \quad 0 < \varepsilon_{c1} < \varepsilon_{cr} \quad (B.31)$$

Se ha usado para la resistencia a tracción la siguiente expresión:

$$f'_t = 0.65 \cdot (f'_c)^{0.33} \quad (B.32)$$

Después de la fisuración, el hormigón puede continuar resistiendo tensiones de tracción como resultado de dos mecanismos independientes: reblandecimiento por tracción y tracción de *stiffening*. El reblandecimiento por tracción va referido a un mecanismo de fractura asociado. Éste es particularmente significativo en estructuras de hormigón que contienen poco o nada de armado. Aquí, la tensión de tracción del hormigón postfisurado debido al reblandecimiento por tracción se calcula como:

$$f_{c1}^a = f'_t \cdot \left[ 1 - \frac{(\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{cr})}{(\varepsilon_{ts} - \varepsilon_{cr})} \right] \quad (B.33)$$

donde la deformación terminal  $\varepsilon_{ts}$  se obtiene a partir del parámetro de energía de fractura  $G_f$  y la longitud característica  $L_r$  como sigue:

$$\varepsilon_{ts} = 2.0 \cdot \frac{G_f}{f'_t \cdot L_r} \quad (B.34)$$

El parámetro  $G_f$  se ha tomado como una constante de valor 75 N/m. El resultado de la formulación del reblandecimiento por tracción del hormigón se muestra en la figura B.6(b).

Las tensiones de tracción postfisura en el hormigón también surgen a partir de las interacciones entre el armado y el hormigón. En las zonas entre fisuras, la carga es transmitida entre el hormigón y las armaduras mediante tensiones de adherencia, dando lugar a niveles significativos de tensiones medias de tracción en el hormigón. Como ya se hizo en el *MCFT*, estas tensiones de tracción de *stiffening* se modelan a través de la siguiente expresión:

$$f_{c1}^b = \frac{f'_t}{1 + \sqrt{c_t \cdot \varepsilon_{c1}}} \quad (B.35)$$

donde el coeficiente de tracción de *stiffening* viene expresado como:

$$c_t = 2.2 \cdot m \quad (B.36)$$

donde:

$$\frac{1}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{4p_i}{d_{b_i}} \cdot |\cos \theta_{n_i}| \quad (B.37)$$

Este modelo se ilustra en la figura B.6(c). De este modo la tensión principal media de tracción en el hormigón es el mayor de los dos valores definidos:

$$f_{c1} = \max(f_{c1}^a, f_{c1}^b) \quad (B.38)$$

Se usa una relación tensión-deformación trilineal para modelar el comportamiento del armado en tracción o en compresión:

$$f_s = E_s \varepsilon_s, \quad 0 < \varepsilon_s < \varepsilon_y \quad (\text{B.39a})$$

$$f_s = f_y, \quad \varepsilon_y < \varepsilon_s < \varepsilon_{sh} \quad (\text{B.39b})$$

$$f_s = f_y + E_{sh}(\varepsilon_s - \varepsilon_{sh}), \quad \varepsilon_{sh} < \varepsilon_s < \varepsilon_u \quad (\text{B.39c})$$

$$f_s = f_y, \quad \varepsilon_s > \varepsilon_u \quad (\text{B.39d})$$

donde  $f_y$  = resistencia a la fluencia;  $E_s$  = módulo de elasticidad;  $E_{sh}$  = módulo de endurecimiento por deformación;  $\varepsilon_y$  = deformación por fluencia;  $\varepsilon_{sh}$  = deformación al comienzo de la deformación por endurecimiento; y  $\varepsilon_u$  = deformación última. Esta formulación, ilustrada en la figura B.6(d), es la que se usa para el cálculo tanto de las tensiones medias como las locales ( $f_{si}$  y  $f_{scri}$ ), dando lugar a las correspondientes deformaciones del armado ( $\varepsilon_{si}$  y  $\varepsilon_{scri}$ ).

### Modelo de deslizamiento [27].

Muchos estudios en la literatura cuantifican el deslizamiento  $\delta_s$  a lo largo de la superficie de una fisura como una función de la tensión tangencial actuante  $v_{ci}$ . Estas formulaciones suelen estar, además, en función de la abertura de fisura  $w$ , tamaño del árido  $a$  y de la resistencia a compresión del hormigón en probeta cilíndrica  $f'_c$  o cúbica  $f_{cc}$ . La relación que se adopta aquí es la dada por Walraven (1981) en [6], tomando la porción de rigidez de su formulación como:

$$\delta_s^a = \frac{v_{ci}}{1.8w^{-0.8} + (0.234w^{-0.707} - 0.20) \cdot f_{cc}} \quad (\text{B.40})$$

Una vez se ha obtenido el desplazamiento por deslizamiento  $\delta_s^g$ , se usa la expresión (12) para determinar la deformación por deslizamiento de la fisura  $\gamma_s^g$ .

Surgen dos dificultades cuando se implementa un modelo cortante-deslizamiento en la formulación analítica. El primero es que, aunque se reconozca de forma correcta que se requiere cierto deslizamiento inicial antes de que el hueco entre las dos superficies de fisura se cierre y se desarrolle la adherencia, incluir la componente de deslizamiento inicial en el procedimiento analítico demuestra ser numéricamente problemático. El segundo, en el caso de elementos que están localmente sin armar, las ecuaciones de equilibrio presentadas anteriormente dan lugar a cero como resultado del cálculo de las tensiones tangenciales en la superficie de las fisuras (ver expresión (B.8)). Esto indica que no se tiene en cuenta la tensión tangencial que surge del efecto de engranamiento de áridos u otros mecanismos. Tensiones tangenciales igual a cero conducen a que el deslizamiento por cortantes sea cero y esto es intuitivamente insatisfactorio.

Una aproximación suplementaria es la de relacionar los cambios en la dirección de las tensiones principales con los cambios en la dirección de las deformaciones aparentes principales. Como se observa en la figura B.1, en los paneles con armado cruzando las fisuras en ángulo oblicuo, la rotación del campo de tensiones tiende a retrasarse con respecto a la rotación del campo de deformaciones. Este retraso se produce pronto justamente después de la primera fisuración y se mantiene relativamente constante en los primeros estadios de carga hasta que uno de los componentes del armado empieza a plastificar. Las observaciones que se obtienen de los ensayos con paneles indican que el retraso inicial es aproximadamente de 5 a 10°, dependiendo de las condiciones de armado.



En relación con la dirección de la fisura inicial  $\theta_{ic}$ , la rotación en las deformaciones principales aparentes  $\Delta\theta_\varepsilon$  se determina, en primer lugar, de acuerdo con la carga prevaleciente y las condiciones materiales en el último estado de carga:

$$\Delta\theta_\varepsilon = \theta_\varepsilon - \theta_{ic} \quad (B.41)$$

Teniendo en cuenta el retraso en la rotación, el cambio en la inclinación de la dirección de la tensión principal  $\Delta\theta_\sigma$  se puede obtener:

$$\Delta\theta_\sigma = (\Delta\theta_\varepsilon - \theta^l) \quad \text{para } |\Delta\theta_\varepsilon| > \theta^l \quad (B.42a)$$

$$\Delta\theta_\sigma = \Delta\theta_\varepsilon \quad \text{para } |\Delta\theta_\varepsilon| \leq \theta^l \quad (B.42b)$$

donde el retraso constante  $\theta^l$  se toma como  $5^\circ$  para elementos armados de forma biaxial,  $7.5^\circ$  para elementos armados de forma uniaxial y  $10^\circ$  para elementos no armados. La inclinación del campo de tensiones en el último estado de carga se calcula como:

$$\theta_\sigma = \theta_{ic} + \Delta\theta_\sigma \quad (B.43)$$

Después, usando la expresión (B.18), se obtiene la deformación debida al deslizamiento por cortante en la fisura  $\gamma_s^b$ . La desventaja en esta aproximación, aparte de estar basada enteramente en una determinación empírica y falta de alguna objetividad, es que en los últimos estados de carga el retraso de la rotación cesa de ser relativamente constante y empieza a escalonarse.

Combinando las dos aproximaciones en una formulación híbrida se eliminan las deficiencias de cada una. La deformación por cortante debida al deslizamiento en la fisura se puede tomar como el máximo de los valores:

$$\gamma_s = \max(\gamma_s^a, \gamma_s^b) \quad (B.44)$$

En los primeros estados de carga o en elementos sin armado el criterio de mantener constante el retraso es efectivo mientras el deslizamiento esté altamente influenciado por el cierre lateral de los huecos a través de las superficies opuestas de la fisura. Para estados de carga más avanzados, la expresión explícita del deslizamiento por cortante de la fisura llega a ser crítica mientras el deslizamiento es, en ese momento, altamente provocado por las tensiones tangenciales que se desarrollan en las superficies de la fisura. La aproximación híbrida resulta ser un modelo que captura los mecanismos relevantes y que se corresponde con cierta precisión al comportamiento observado.

### **Conclusiones según el propio Vecchio tras la formulación del material [27].**

El modelo *DSFM* se propone como un modelo de fisuración difusa alternativo para el análisis del hormigón armado fisurado. Las ecuaciones de compatibilidad, de equilibrio y constitutivas se formulan en términos de tensiones y deformaciones medias, prestando una atención particular a los mecanismos de reblandecimiento por compresión (*softening*) y al de tensión de *stiffening*. Otro aspecto a tener en cuenta en la teoría es el considerar las

condiciones locales en la localización de las fisuras, debido a que la presencia de las fisuras crea distorsiones en el campo de tensiones que pueden influir en el comportamiento. La principal novedad de la teoría es la inclusión en la formulación de un deslizamiento discreto en la superficie de las fisuras en las condiciones de compatibilidad,.

El procedimiento analítico que resulta de la formulación del deslizamiento es aquel que ocupa un terreno medio entre modelos de fisuración fija y modelos de fisuración rotativa, capturando las ventajas de cada uno. Al contrario que ocurre con los modelos de fisuración fija, el *DSFM* permite la reorientación progresiva y gradual de la dirección de las tensiones principales (y de la dirección de las fisuras) en el hormigón, con cierto grado de retraso. Al contrario que ocurre con los modelos de fisuración rotativos más comunes, el *DSFM* permite la divergencia entre la dirección de las tensiones principales y la dirección de las deformaciones principales. En ambos aspectos, el modelo resulta mucho más consistente con el comportamiento observado.

El *DSFM* es una extensión del *MCFT*. No obstante, por el hecho de incluir el deslizamiento por cortante en la fisura en las ecuaciones de compatibilidad, se obtienen una serie de mejoras:

- La inclinación de las tensiones principales y de las deformaciones principales no es, necesariamente, la misma.
- Se representan mejor las condiciones de comportamiento y de rotura cuando se tiene en cuenta la influencia del deslizamiento por cortante en la fisura.
- Se elimina la molesta comprobación de la tensión tangencial en la fisura.
- Se reduce y se dota de consistencia al grado de reblandecimiento por compresión (*softening*) como resultado de la fisuración en sí, en comparación con lo expuesto por otros autores.

Como un añadido a la formulación del material también se comenta, a continuación, la manera de implementar el modelo de material *DSFM* según Vecchio [28].

### **Implementación en el modelo de elementos finitos [28].**

Considerar el estado tensional y deformacional en un punto del continuo en el hormigón armado, como se muestra en la figura B.7.

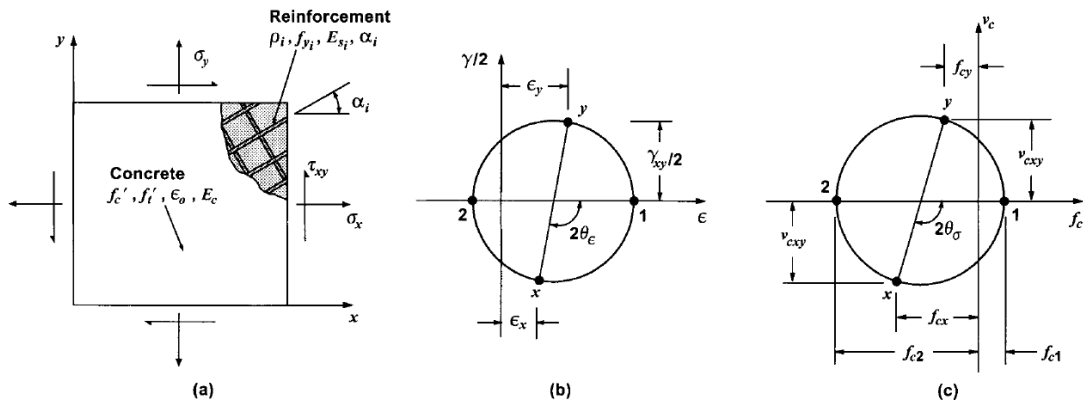


Figura B.7: Elemento de hormigón armado: (a) Propiedades del elemento y tensiones aplicadas; (b) Deformaciones medias totales en el elemento; (c) Tensiones medias en el hormigón [28].

Dada la tensión  $[\sigma]$  actuando en el punto, la deformación total  $[\varepsilon]$  resultante debe ser la que satisfaga la condición:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] - [\sigma^0] \quad (B.45)$$

donde  $[D]$  = la matriz de rigidez del material. Las tensiones internas antes de aplicar la carga  $[\sigma^0]$ , debidas a las deformaciones compensadas (o no mecánicas) elásticas y plásticas en el hormigón y en el armado (incluyendo el deslizamiento por cortante en la fisura), se define como sigue:

$$[\sigma^0] = [D_c]\{[\varepsilon^s] + [\varepsilon_c^0] + [\varepsilon_c^p]\} + \sum_{i=1}^n [D_s]_i [\varepsilon_s^0]_i \quad (B.46)$$

Para el proceso de implementación descrito aquí, la matriz de rigidez material  $[D]$  para un elemento de hormigón armado, se construye en el contexto de matriz de rigidez secante. Las matrices de rigidez para el hormigón  $[D_c]'$  y cada una de las componentes del armado  $[D_s]_i$  se definen, en un primer momento, con respecto a sus ejes principales. La rigidez total se determina combinando las contribuciones de cada uno de los componentes, usando las transformaciones apropiadas para tener en cuenta la anisotropía.

La matriz de rigidez del hormigón  $[D_c]'$  evaluada en relación con las direcciones principales de la tensión (1, 2) es:

$$[D_c]' = \begin{bmatrix} \bar{E}_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{E}_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{G}_c \end{bmatrix} \quad (B.47)$$

donde  $\bar{E}_{c1}$ ,  $\bar{E}_{c2}$  y  $\bar{G}_c$  = módulo secante. Para un estado tensión-deformación particular, el módulo secante se evalúa como:

$$\bar{E}_{c1} = \frac{f_{c1}}{\varepsilon_{c1}}; \quad \bar{E}_{c2} = \frac{f_{c2}}{\varepsilon_{c2}}; \quad \bar{G}_c = \frac{\bar{E}_{c1} \cdot \bar{E}_{c2}}{E_{c1} + E_{c2}} \quad (B.48)$$

donde  $\varepsilon_{c1}$  y  $\varepsilon_{c2}$  = red principal de deformaciones en el hormigón;  $f_{c1}$  y  $f_{c2}$  = tensiones principales correspondientes (ver figura B.8 (a)). El efecto de Poisson y la expansión lateral, si se consideran, se tratan como deformaciones elásticas no mecánicas (compensadas)  $[\varepsilon_c^0]$ .

Para cada componente del armado, se evalúa su correspondiente matriz  $[D_s]'_i$  :

$$[D_s]'_i = \begin{bmatrix} \rho_i \bar{E}_{si} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.49)$$

donde  $\rho_i$  = densidad de armado. El modulo secante  $\bar{E}_{si}$  se define como:

$$\bar{E}_{si} = \frac{f_{si}}{\varepsilon_{si}} \quad (B.50)$$

donde  $\varepsilon_{si}$  y  $f_{si}$  = deformación media y tensión media, respectivamente, en el armado (ver figura B.8 (b)).

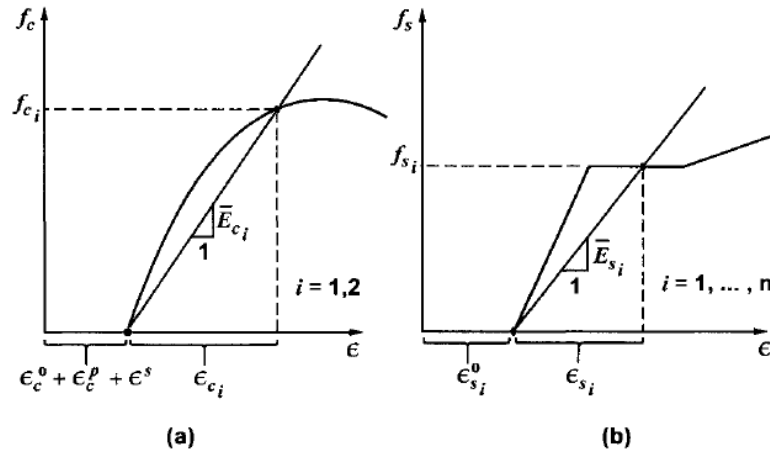


Figura B.8: Definición del módulo secante: (a) Hormigón; (b) Armado [28].

Las componentes de las matrices de rigidez se transforman al sistema de referencia global y después se suman. Por tanto, la matriz de rigidez total evaluada en el sistema de referencia global  $[D]$  será:

$$[D] = [D_c] + \sum_{i=1}^n [D_s]_i \quad (B.51)$$

donde:

$$[D_c] = [T_c]^T [D_c]' [T_c] \quad (B.52)$$

$$[D_s]_i = [T_s]^T [D_s]'_i [T_s]_i \quad (B.53)$$

La matriz de transformación  $[T]$  viene dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \psi & \sin^2 \psi & \cos \psi \sin \psi \\ \sin^2 \psi & \cos^2 \psi & -\cos \psi \sin \psi \\ -2 \cos \psi \sin \psi & 2 \cos \psi \sin \psi & (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \end{bmatrix} \quad (B.54)$$

donde  $\psi = \theta$  para el hormigón (por ejemplo, la inclinación de la tensión principal) y  $\psi = \alpha_i$  para el armado (por ejemplo, la orientación de las barras).

En esta formulación es necesario tener en cuenta para las deformaciones compensadas (no mecánicas) las fuerzas nodales debidas a la deformación previa o predeformación. Para las deformaciones debidas al deslizamiento de las fisuras  $[\varepsilon^s]$ , uniones con desplazamiento libre  $[r_c^s]$  se determinan a partir de la geometría del elemento como sigue:

$$[r_c^s] = \int [\varepsilon^s] dA \quad (B.55)$$

Dados los desplazamientos libres, las fuerzas nodales debidas a la deformación previa o predeformación  $[F_c^s]$  se pueden evaluar como:

$$[F_c^s] = [k_c][r_c^s] \quad (B.56)$$

donde  $[k_c]$  = componente del hormigón en la matriz de rigidez del elemento. Las fuerzas debidas a la predeformación se calculan de forma similar para las deformaciones compensadas (no mecánicas) tanto elásticas como plásticas. Las fuerzas debido a la predeformación se añaden al vector de cargas nodales.

Para llevar a cabo el análisis no lineal para una estructura de hormigón armado se usa una rutina iterativa con rigidez secante para carga total. A través de cada iteración, las matrices de rigidez material  $[D]$  y la del elemento  $[k]$  se van actualizando conforme se va alcanzando una convergencia satisfactoria. El criterio de convergencia puede ir basado tanto en el módulo secante como en los desplazamientos del elemento cuando se alcancen valores estables. En la figura B.9 se muestra una subporción del algoritmo. A este respecto se puede notar que, mientras las matrices de rigidez cambian a través de cada iteración, también lo harán los vectores de fuerzas debidas a la predeformación debido a las deformaciones por deslizamiento en las fisuras, deformaciones compensadas (no mecánicas) elásticas y las deformaciones compensadas (no mecánicas) plásticas. Así que el vector de fuerzas total debe ser recalculado en cada iteración.

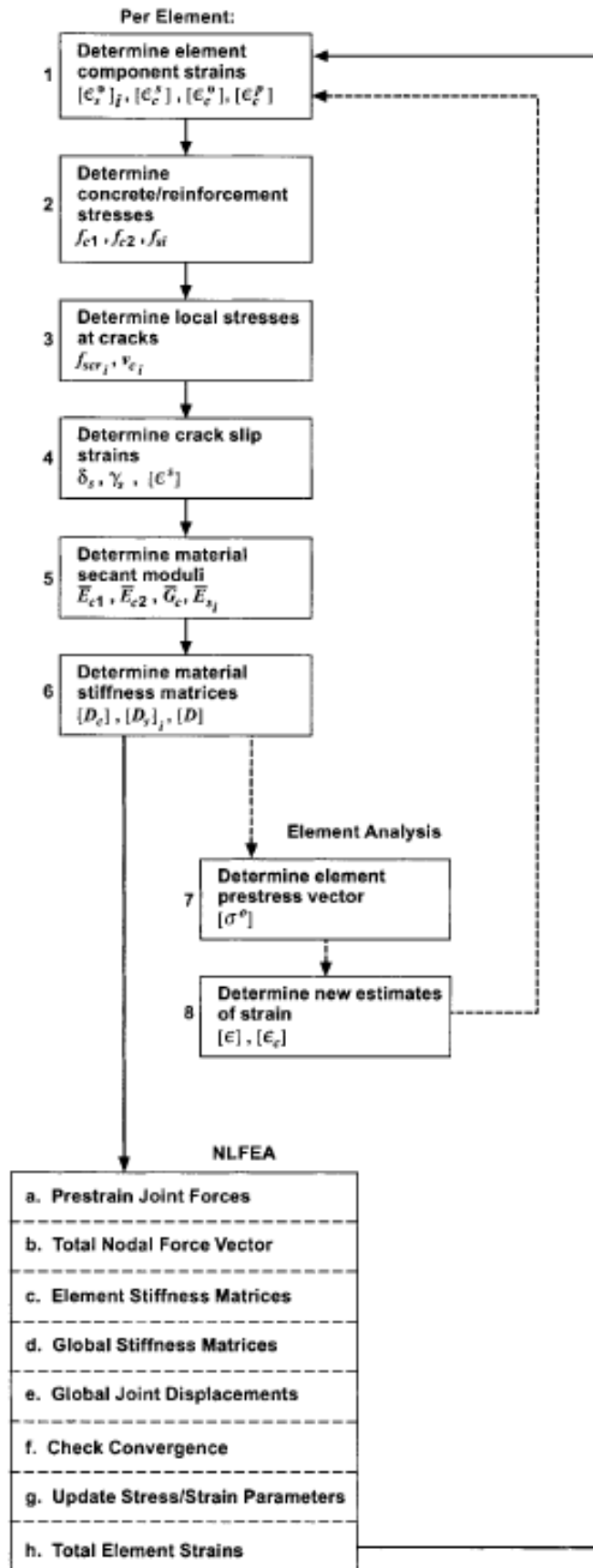


Figura B.9: Algoritmo de análisis no lineal [28].

### Implementación del modelo de deslizamiento por cortante [28].

Como se explica anteriormente, para la formulación del *DSFM* se consideran varias alternativas en la modelización del deslizamiento por cortante en la fisura. Una es emplear un modelo constitutivo explícito para relacionar la cantidad de deslizamiento por cortante con la magnitud de la tensión tangencial (por cortante) actuando en la fisura. La segunda alternativa consiste en fijar el grado de "retraso" entre la rotación del campo de tensiones y el campo de deformaciones en el hormigón. Al final se toma una aproximación híbrida que combina las dos alternativas.

La relación que se adopta aquí es la dada por Walraven (1981) en [22] , y descrita como expresión (B.40) en este mismo capítulo:

$$\delta_s = \frac{v_{ci}}{1.8w^{-0.8} + (0.234w^{-0.707} - 0.20) \cdot f_{cc}} \quad (B.40)$$

donde  $\delta_s$  = desplazamiento por deslizamiento a lo largo de la fisura (mm);  $v_{ci}$  = tensión tangencial (por cortante) actuando sobre la fisura (MPa);  $w$  = abertura de fisura media (mm); y  $f_{cc}$  = resistencia del hormigón para probetas cúbicas (MPa).

El *MCFT* predice el fallo por la tensión en el hormigón según su tensión pico,  $f_{c2} > f_p$  (aplastamiento del hormigón). El *DSFM*, por otra parte, indica un comportamiento gobernado por el excesivo deslizamiento a lo largo de la superficie de la fisura conduciendo al fallo del hormigón por cortante. El último es mucho más consistente con el modo de fallo observado.

### Implementación de la resistencia a cortante [28].

La inclusión del deslizamiento por cortante en la fisura en las relaciones de compatibilidad del *DSFM* (como ya se explica anteriormente) da como resultado una reducción de la rigidez del elemento. Así que, una menor degradación de la rigidez va atribuida al reblandecimiento (*softening*) del hormigón en compresión debido a la influencia de las fisuras transversales. En el *MCFT*, donde las deformaciones debidas al deslizamiento en la fisura no se consideran de forma explícita, la necesaria degradación en la rigidez del elemento viene representada enteramente por un incremento del factor de reblandecimiento por compresión. A este respecto, la aproximación del *DSFM* es más racional y más consistente con el grado de reblandecimiento por compresión aportado por otros investigadores. No obstante, las dos aproximaciones producen resultados sustancialmente similares dentro de un rango importante de problemas, tal y como se muestra en la figura B.10. Las dificultades pueden surgir si las dos formulaciones se combinan de forma incorrecta, por ejemplo, usando las ecuaciones de reblandecimiento de *MCFT* con las relaciones de compatibilidad del *DSFM*.

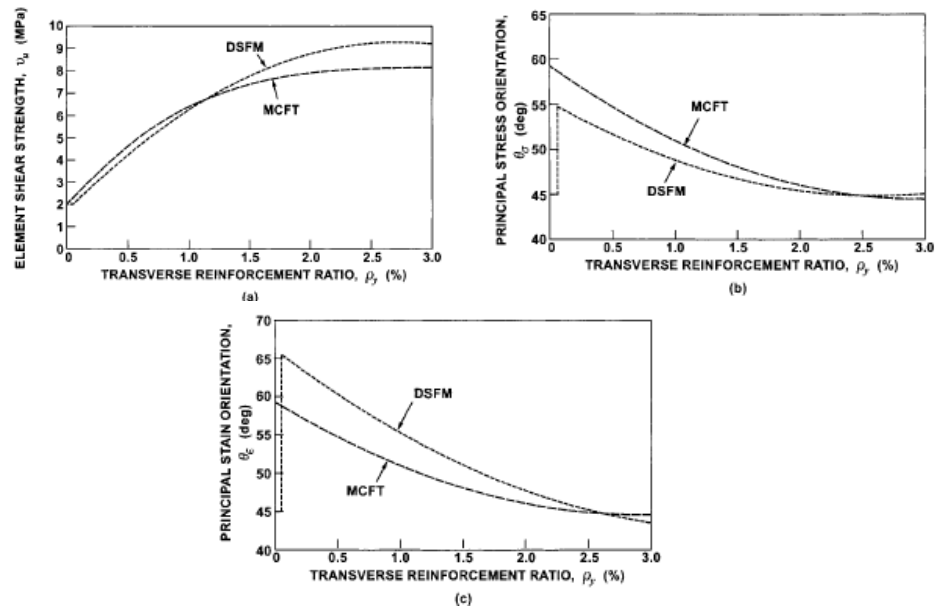


Figura B.10: Comparación de respuestas de un panel hipotético: (a) Resistencia a cortante; (b) Inclinación de las tensiones principales en carga última; (c) Inclinación de las deformaciones principales en carga última [28].

### Conclusiones al proceso de implementación según Vecchio [28].

Se presenta el *DSFM* como un modelo adaptable a los algoritmos de elementos finitos no lineales. El deslizamiento por cortante en la fisura así como las deformaciones elásticas y plásticas compensadas (no mecánicas) en el hormigón y en el acero se manejan a través del uso de fuerzas nodales generadas por una deformación previa (predeformación). El algoritmo resultante es estable y robusto, permitiendo calcular la respuesta carga-deformación hasta la resistencia última. El modelo conceptual es simple y transparente y los cálculos que tiene en cuenta son básicos.

Se pueden extraer las siguientes observaciones:

- Las formulaciones de deslizamiento en la fisura presentadas tienen en cuenta la divergencia entre las direcciones principales de las tensiones y de las deformaciones en el hormigón, mostrando un comportamiento más similar al observado en los ensayos.

- El modelo híbrido de deslizamiento en la fisura es una exitosa fusión de aproximaciones tensionales y de divergencia entre tensiones y deformaciones. No obstante, el modelo tensional de deslizamiento en la fisura es suficiente en muchas aplicaciones.

- En elementos que contienen poca o ninguna cantidad de armado transversal, la rotación del campo de tensiones en el hormigón se retrasa alrededor de  $10^\circ$  con respecto al campo de deformaciones, resultando en unas capacidades computacionales reducidas para el cortante, comparadas con un modelo de rotación total donde la inclinación del campo de tensiones y de deformaciones se asume que coinciden.

- En elementos que contienen gran cantidad de armado por cortante (armado transversal), el grado más bajo de reblandecimiento (*softening*) por compresión, atribuible a los resultados



de la fisuración transversal, se ve incrementado en comparación con los modelos de rotación total.

- El grado de reblandecimiento por compresión obtenido con el *DSFM* es consistente con los aportados por otros investigadores.

**Validación del modelo material DSFM según Vecchio [29].**

También el propio Vecchio realiza la validación [29] del material *DSFM* con 40 paneles tal y como se describe en el estado del arte de este mismo documento.

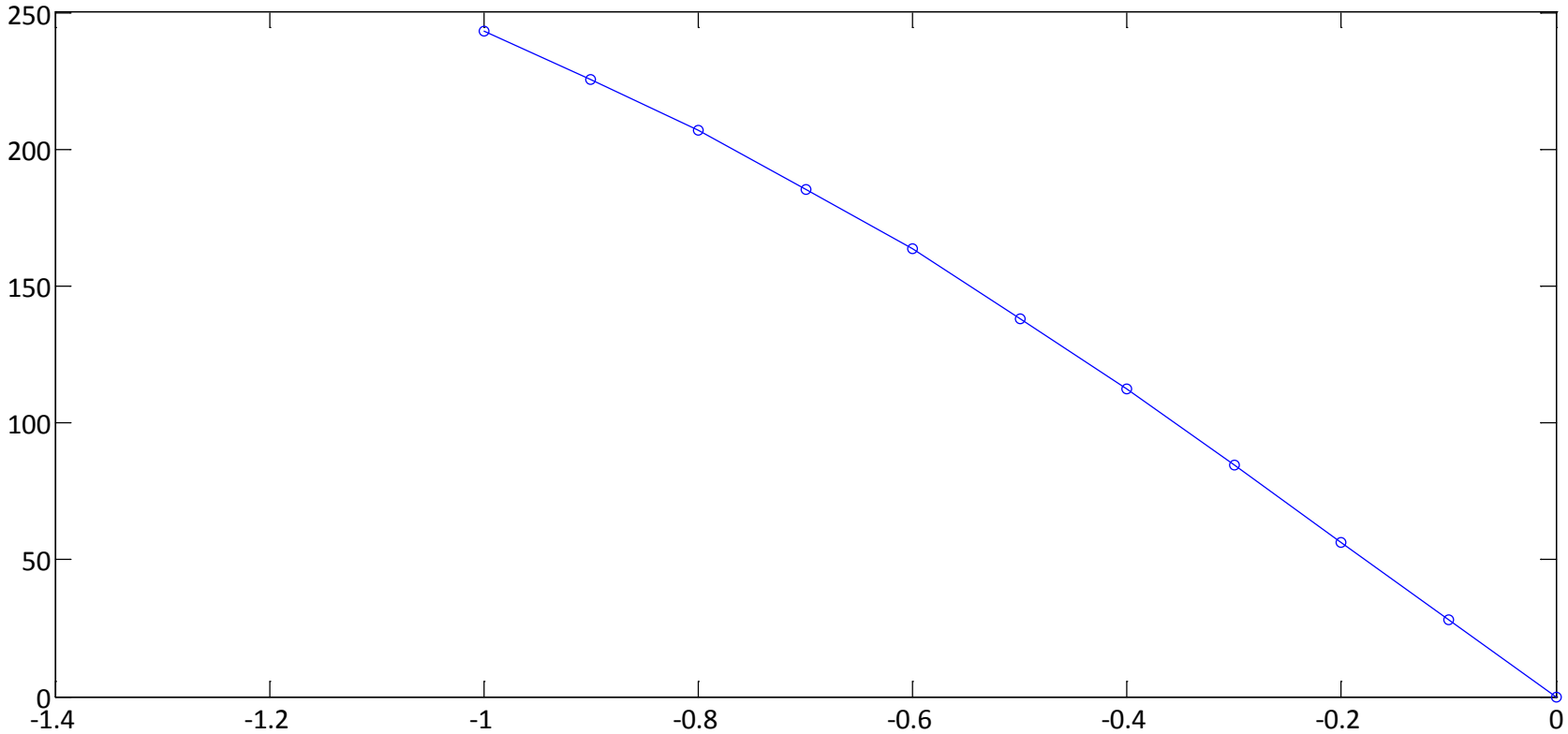


# Anejo C:

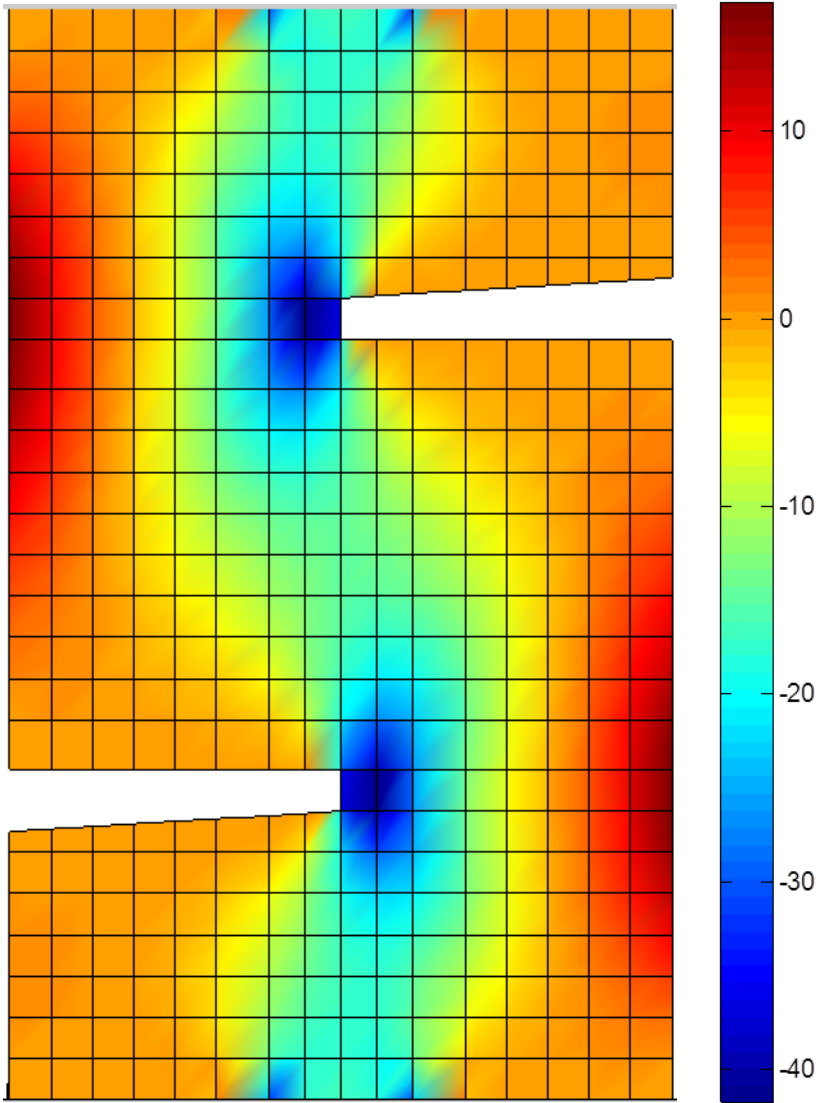
Modelado con Elementos Finitos

- Elemento Finito: cuad 9 nodos
- Material: MatJ2
- Armadura: DIFUSA
- Armado: HA-3FI8

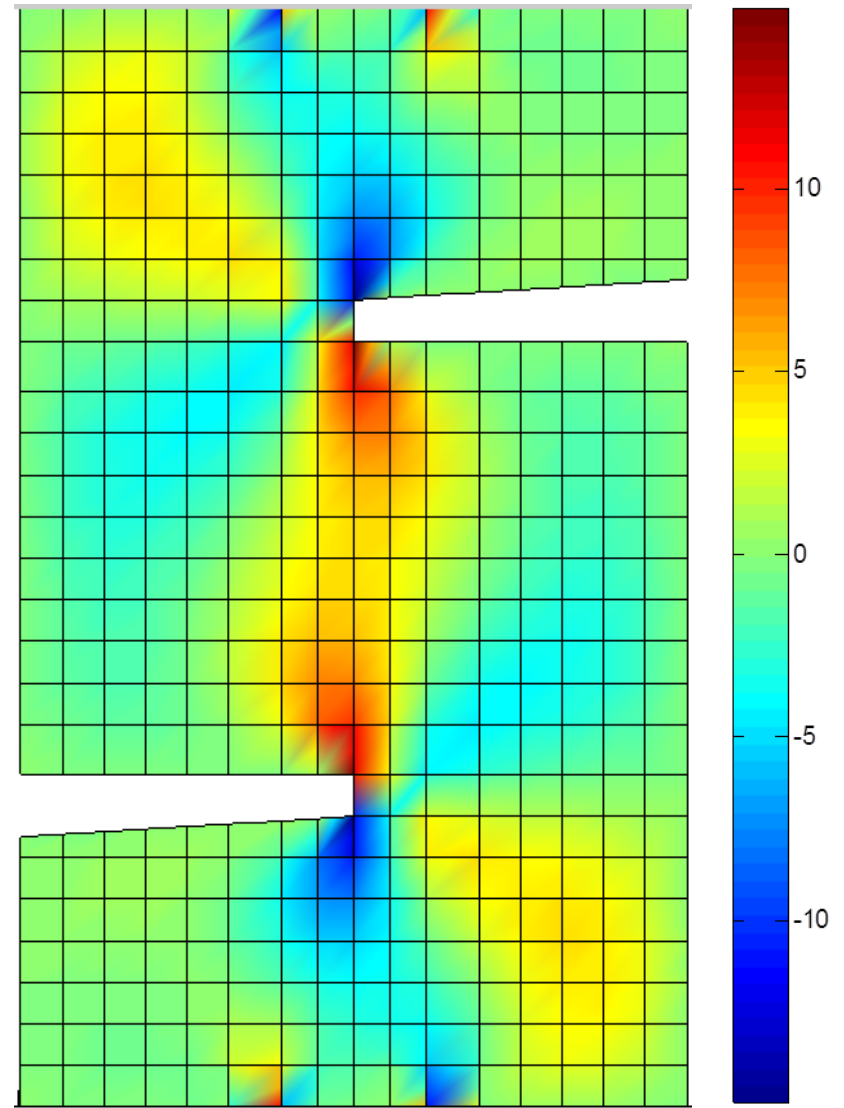
# Curva carga P (KN) desplazamiento impuesto u(mm)



Representación de la sigma y

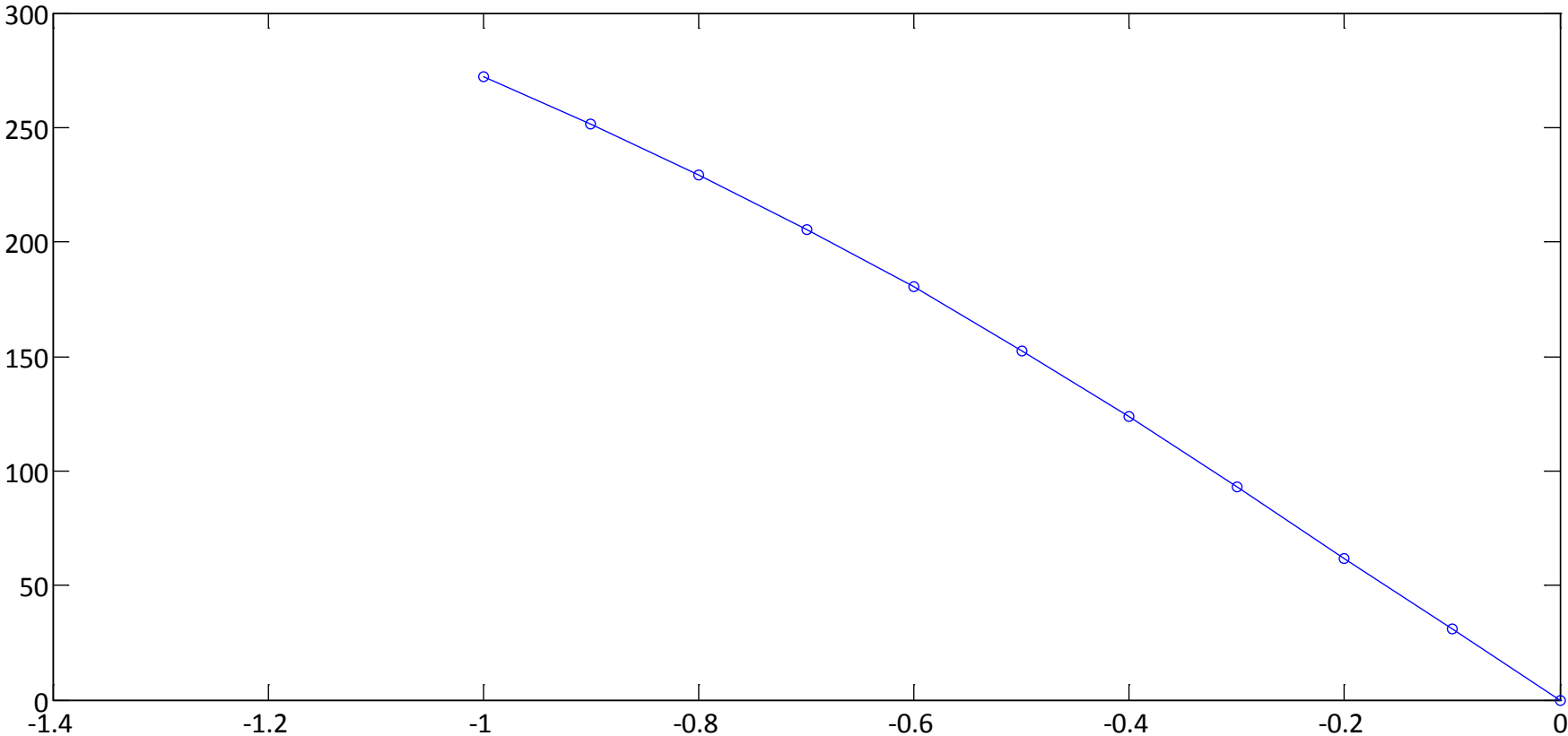


Representación de la tau xy



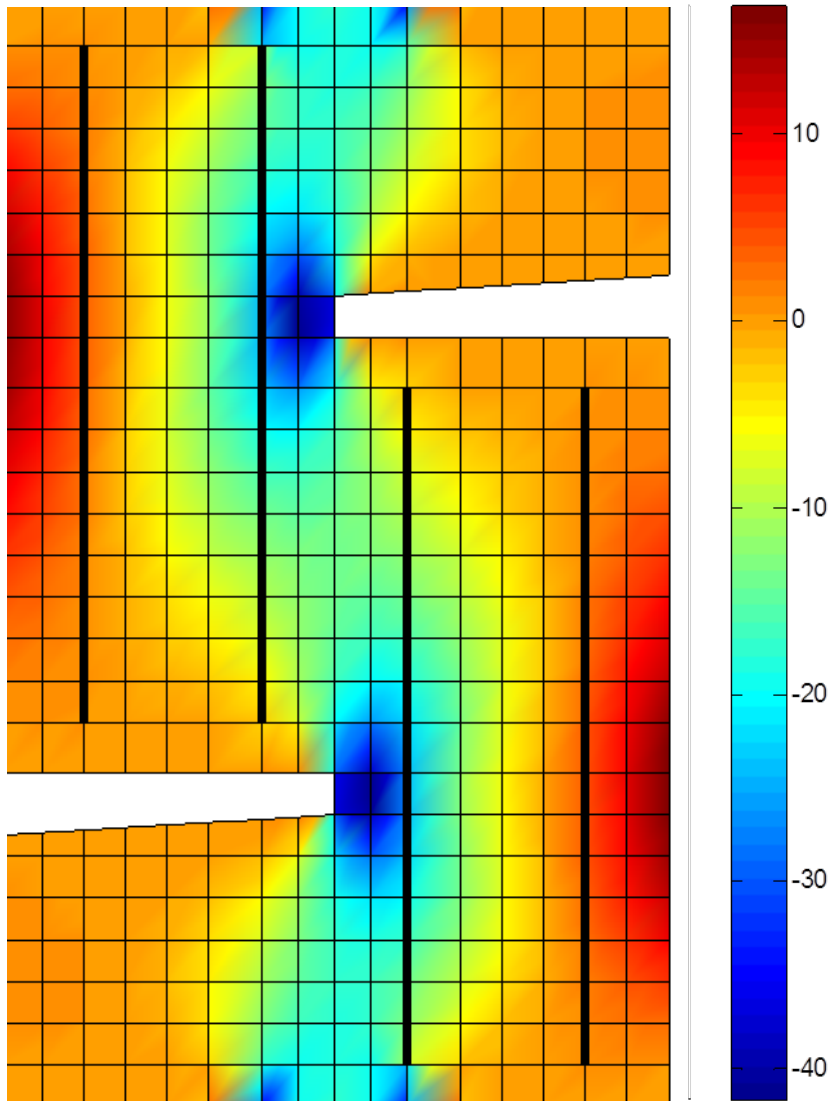
- Elemento Finito: cuad 9 nodos
- Material: MatJ2
- Armadura: Parcialmente Discreta 1
- Armado: HA-3F18

# Curva carga P (KN) desplazamiento impuesto u(mm)

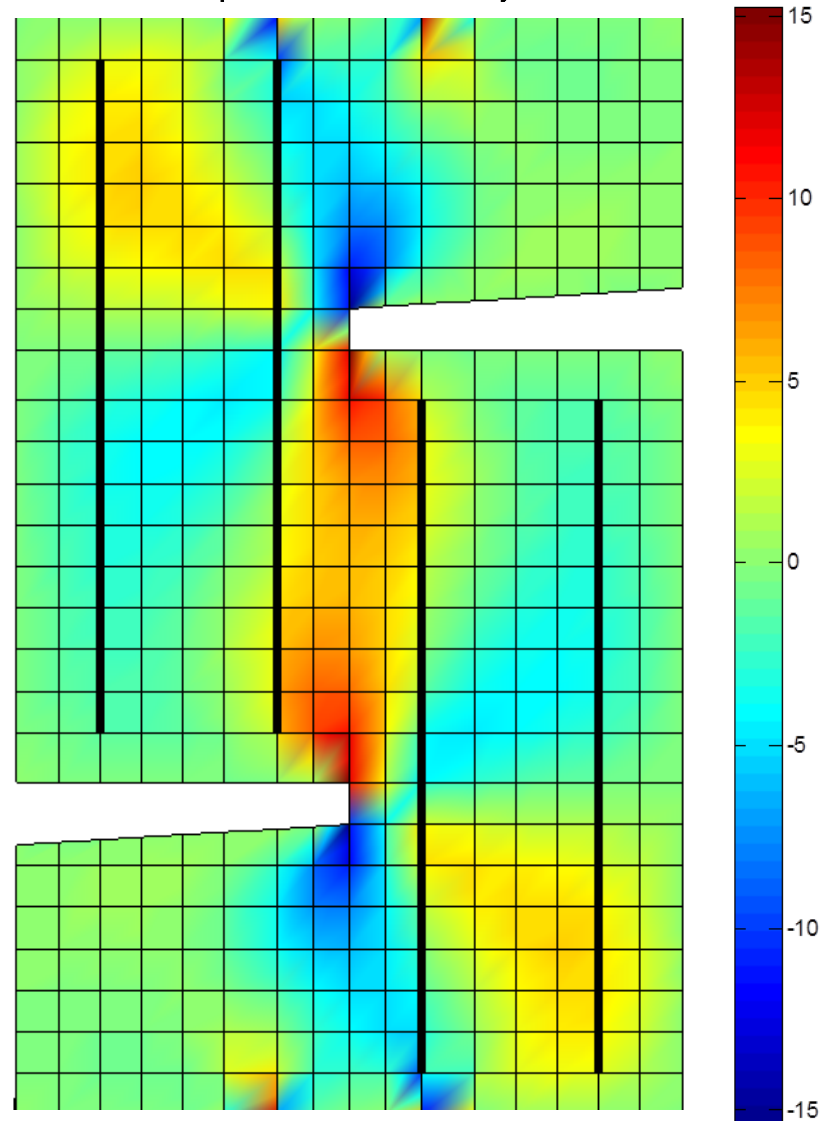




Representación de la sigma y

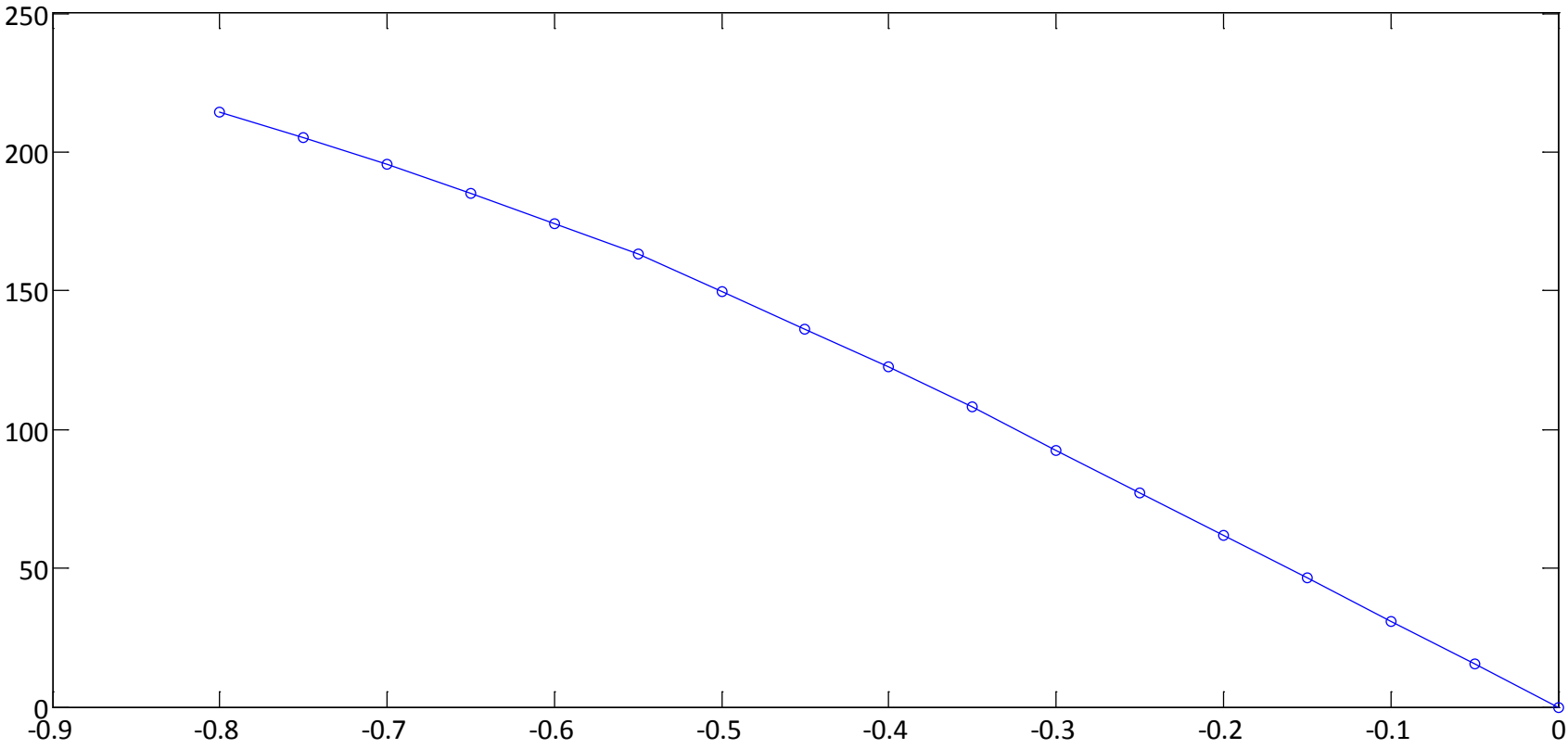


Representación de la tau xy

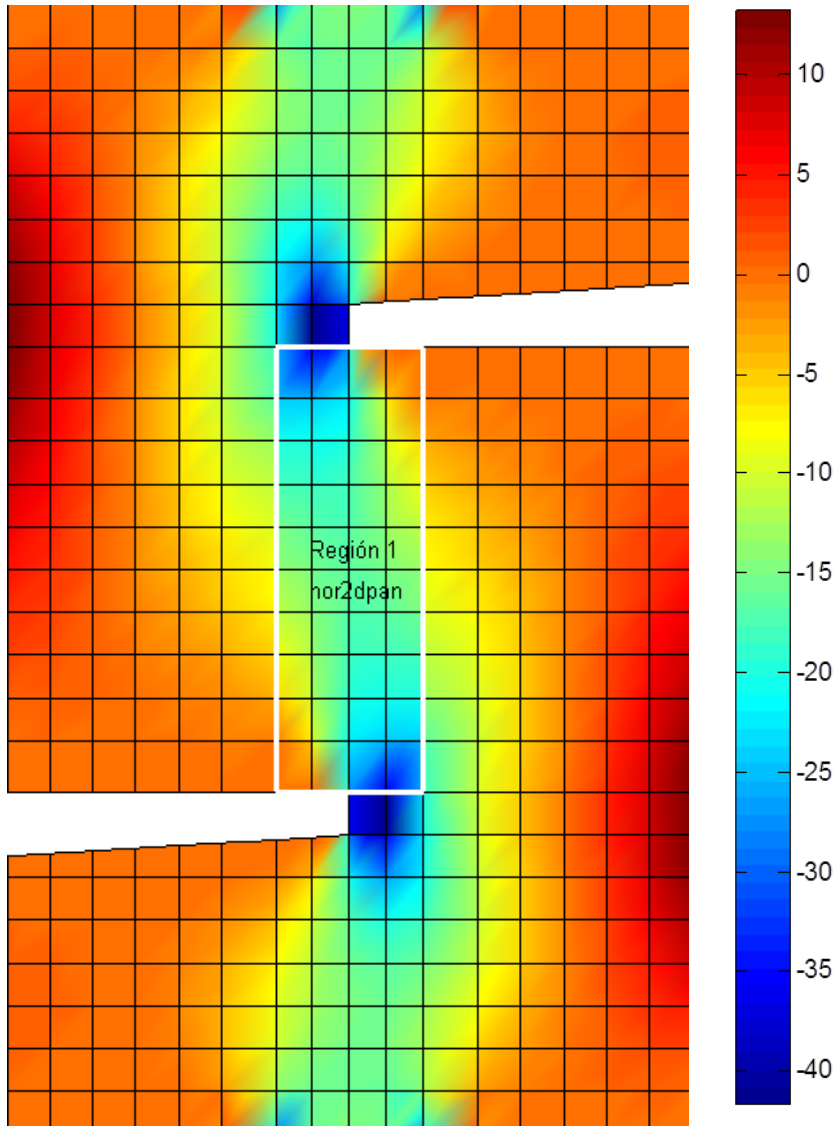


- Elemento Finito: cuad 9 nodos
- Material: MatJ2 y hor2dpan en región 1
- Armadura: DIFUSA
- Armado: HA-3FI8

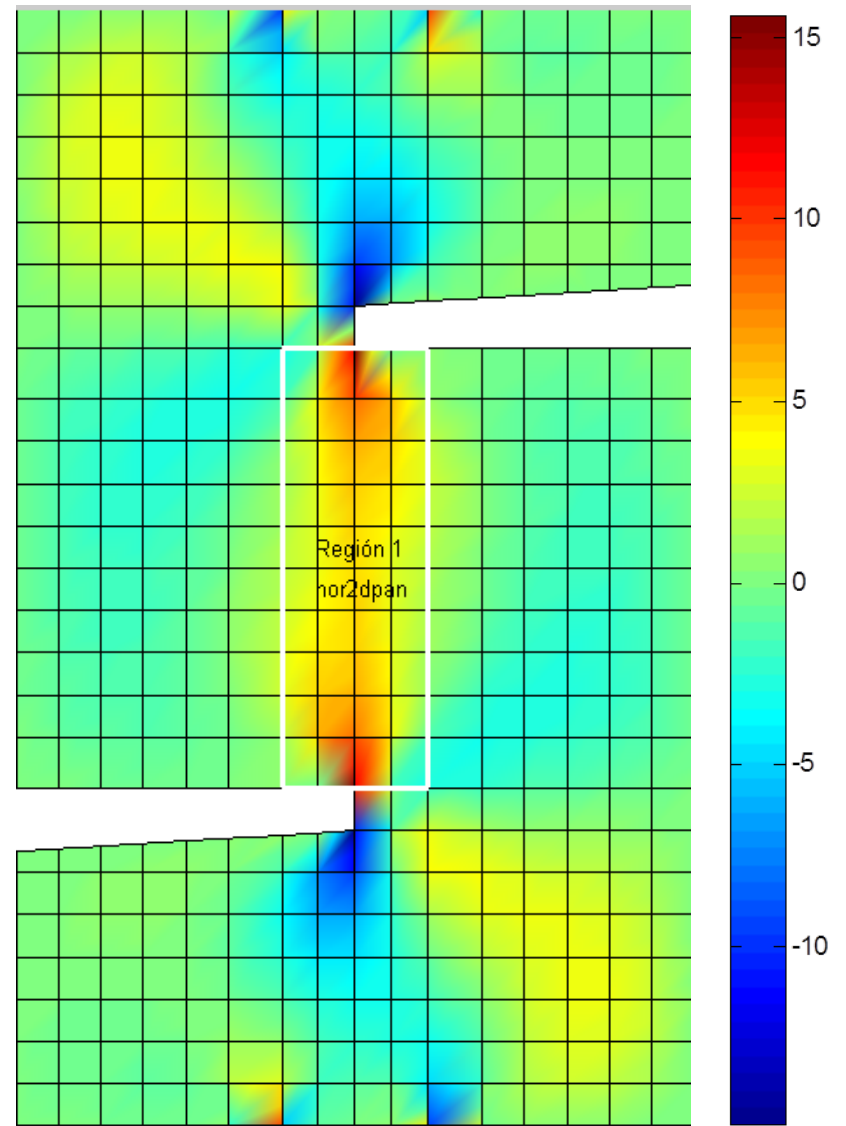
# Curva carga P (KN) desplazamiento impuesto u(mm)



Representación de la sigma y

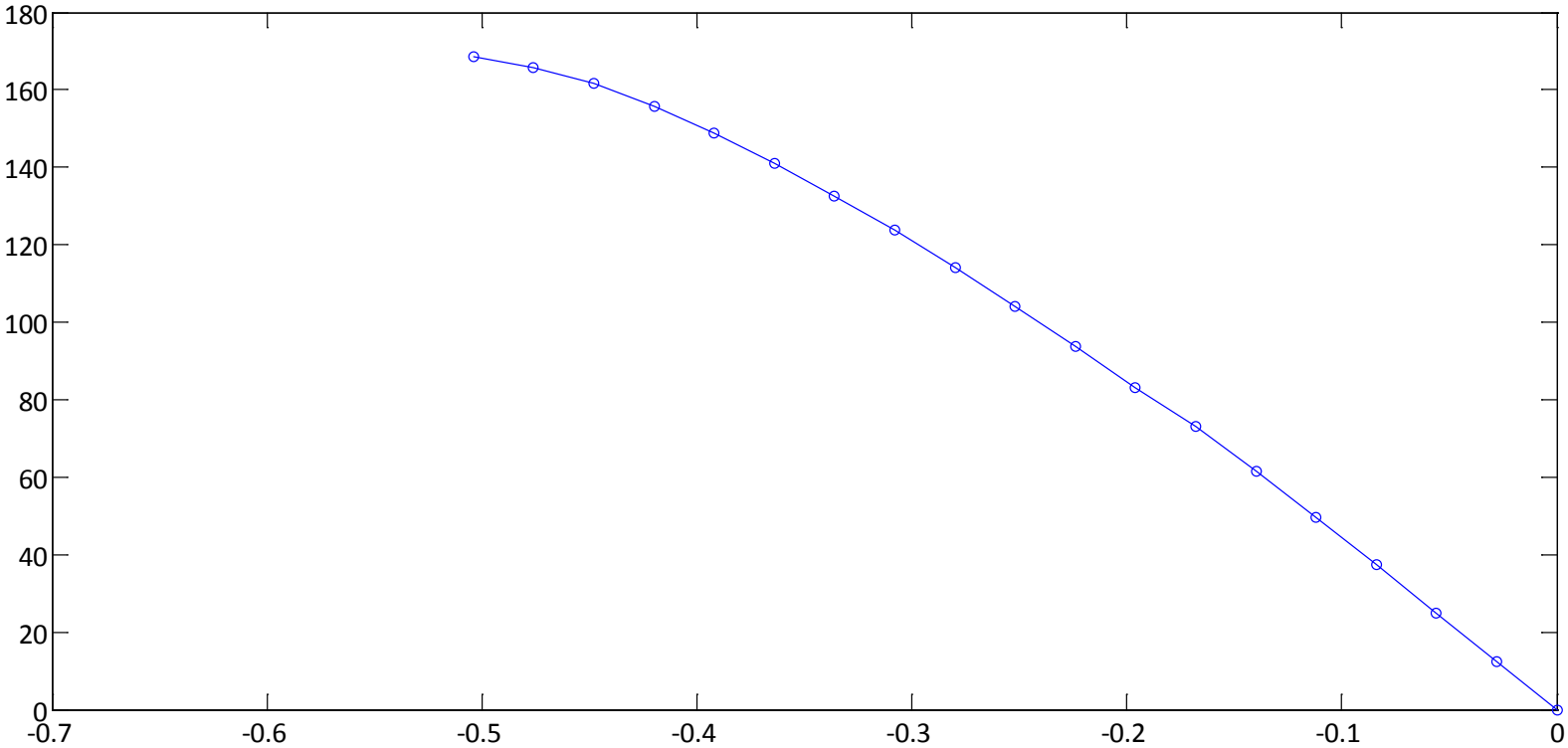


Representación de la tau xy

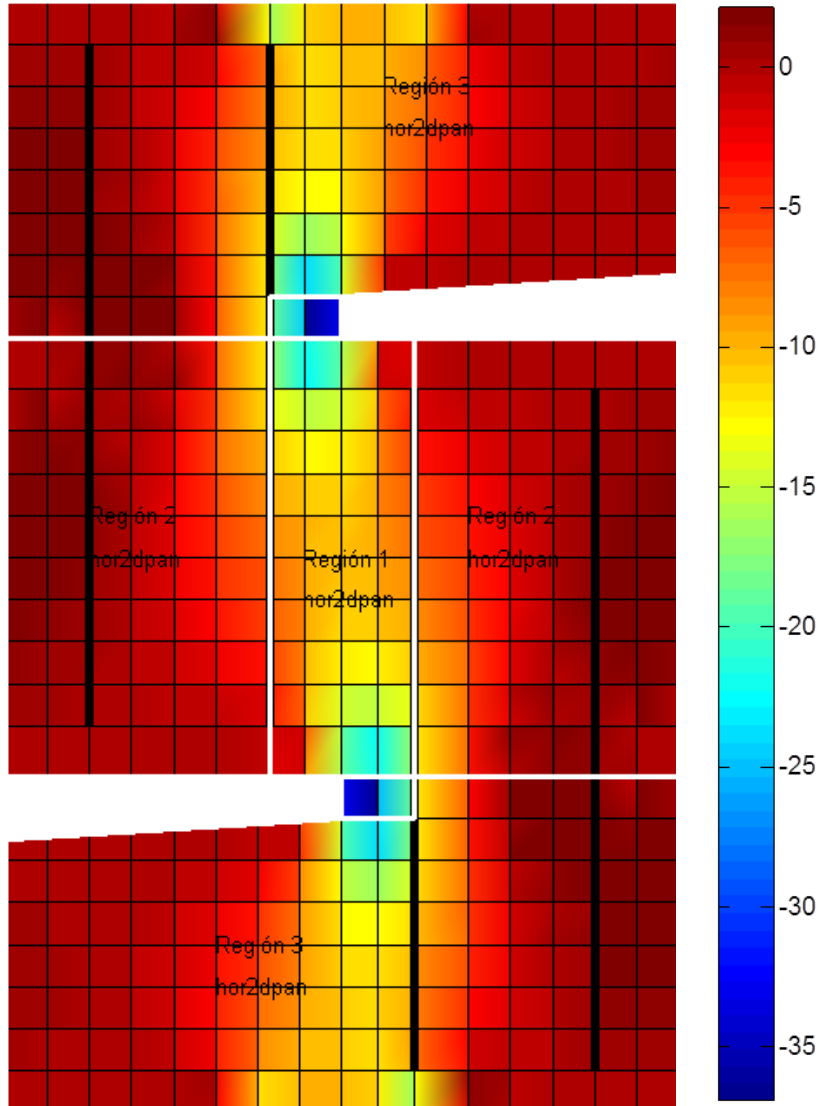


- Elemento Finito: cuad 4 nodos
- Material: hor2dpan
- Armadura: Parcialmente Discreta 1
- Armado: HA-3F18

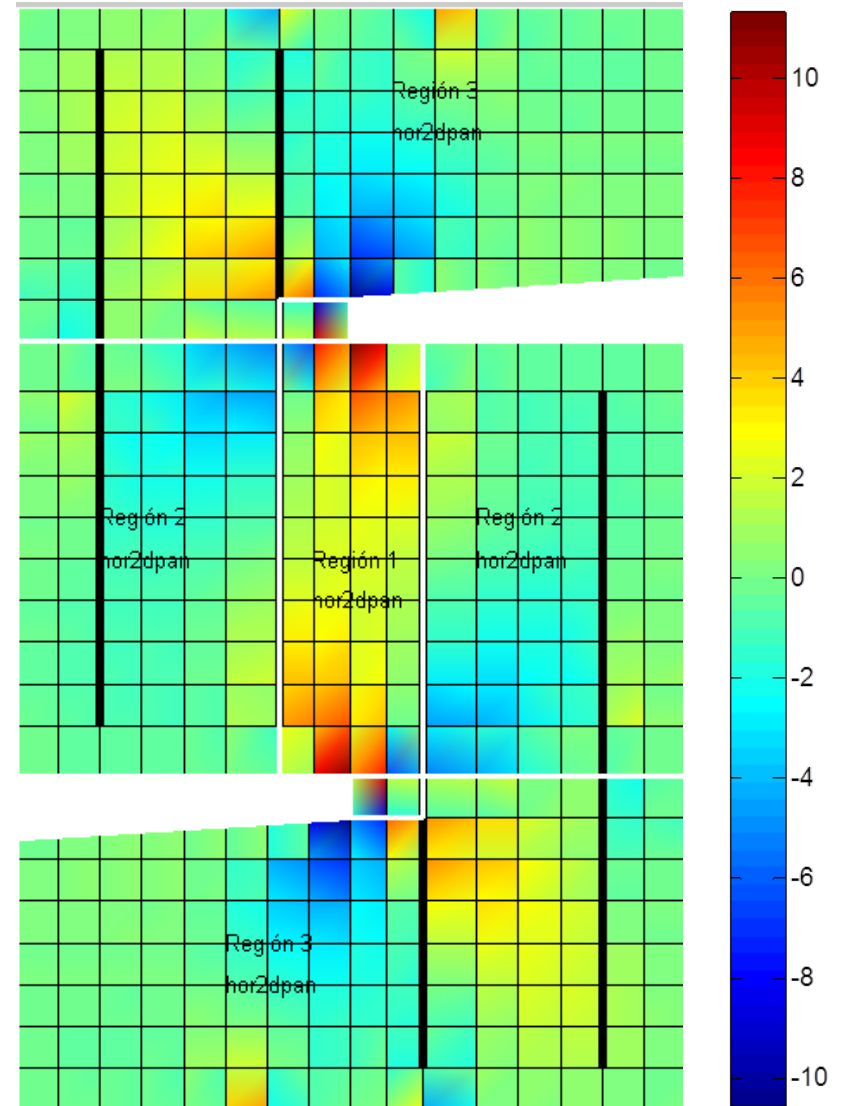
# Curva carga P (KN) desplazamiento impuesto u(mm)



Representación de la sigma y



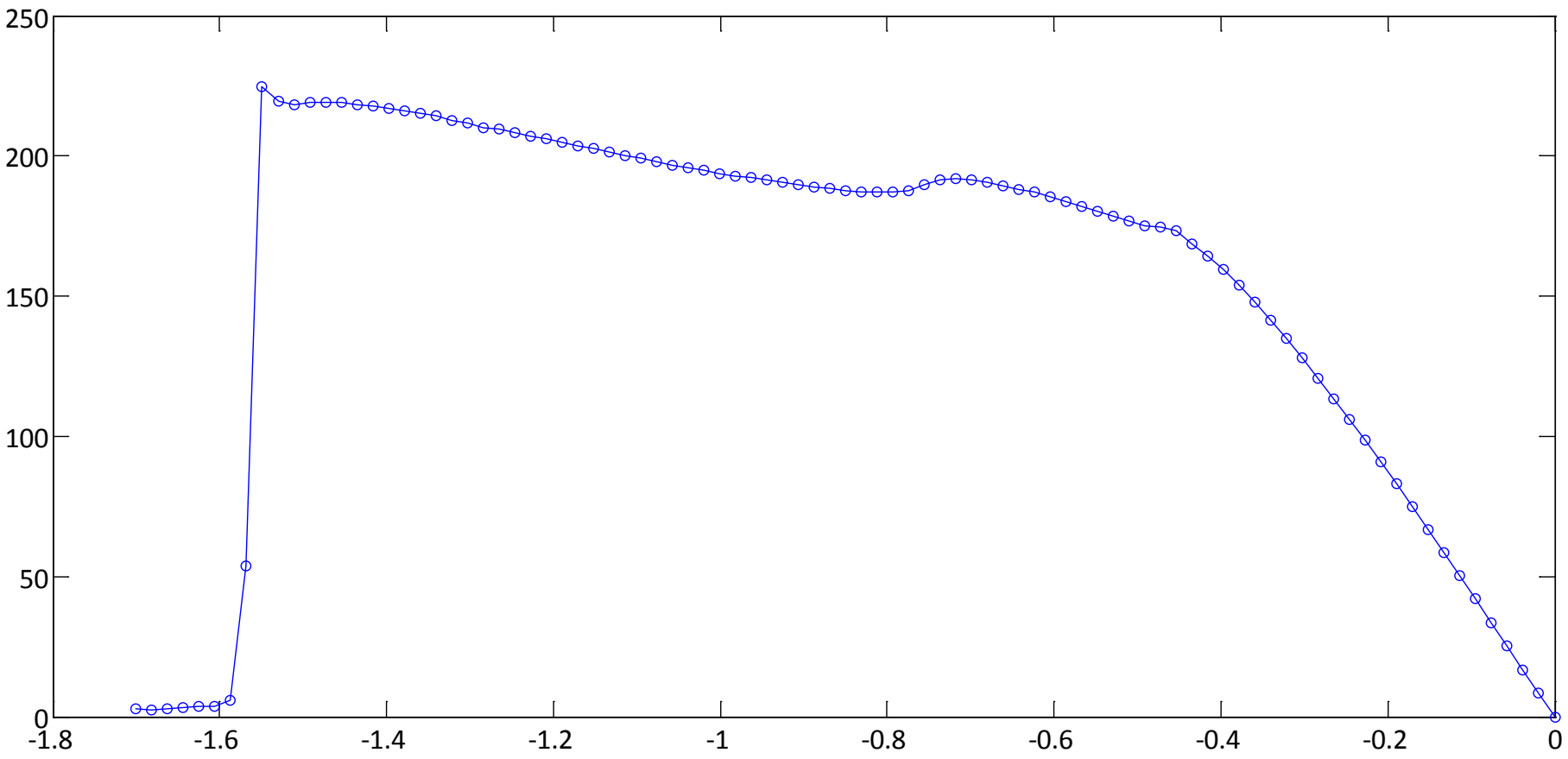
Representación de la tau xy



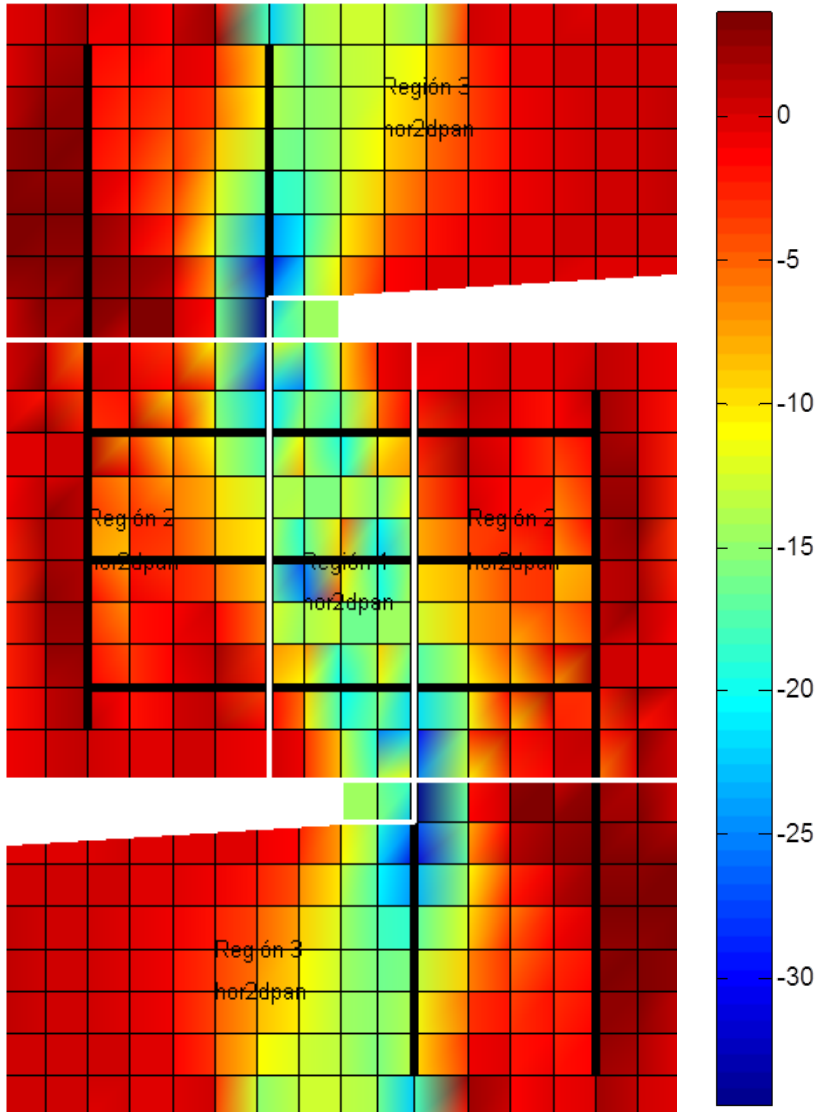
- Elemento Finito: cuad 4 nodos
- Material: hor2dpan
- Armadura: Parcialmente Discreta 2
- Armado: HA-3F18



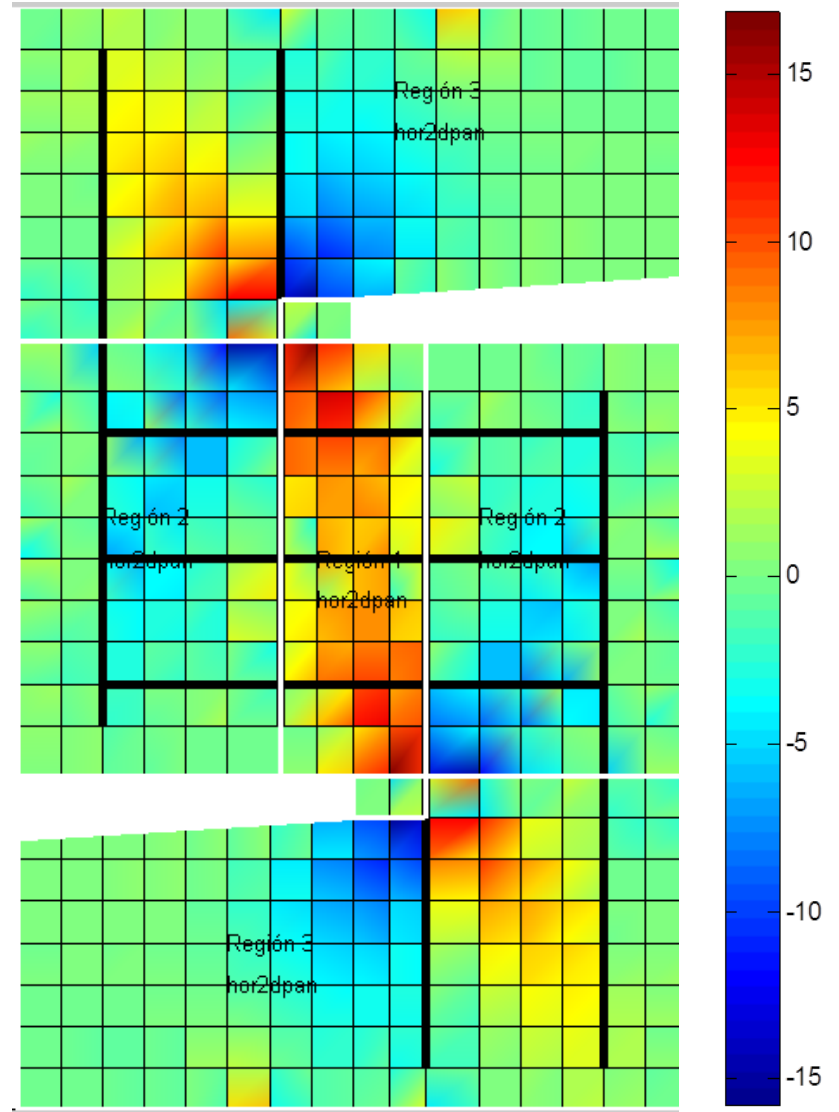
# Curva carga P (KN) desplazamiento impuesto u(mm)



Representación de la sigma y

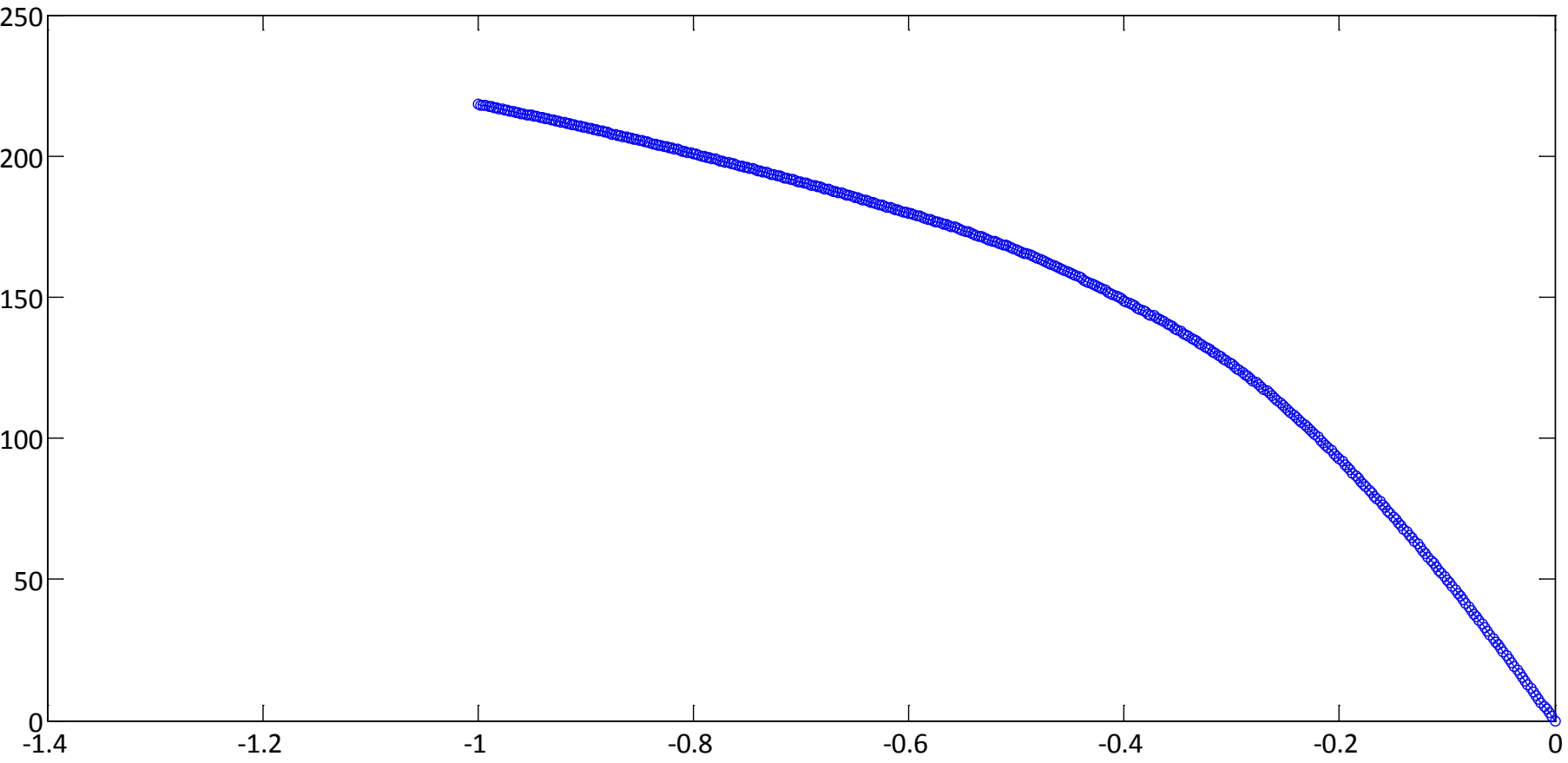


Representación de la tau xy

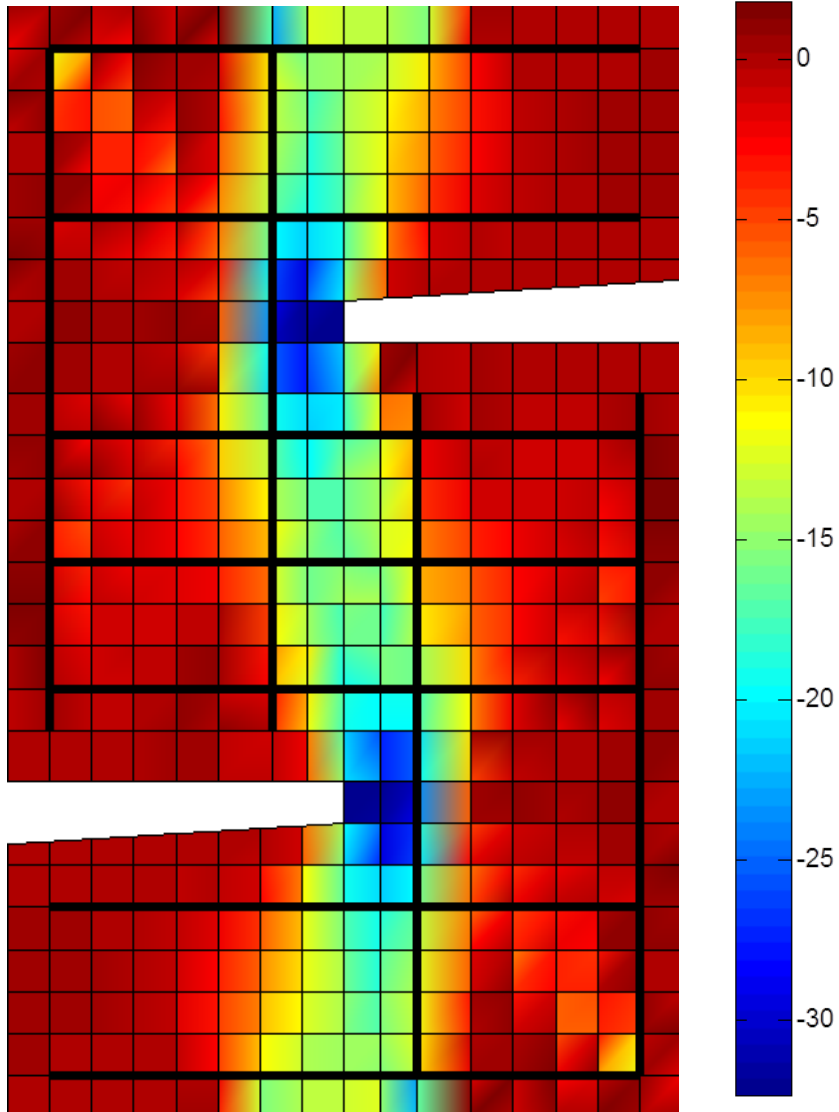


- Elemento Finito: cuad 4 nodos
- Material: hor2dpan
- Armadura: TOTALMENTE Discreta
- Armado: HA-3FI8

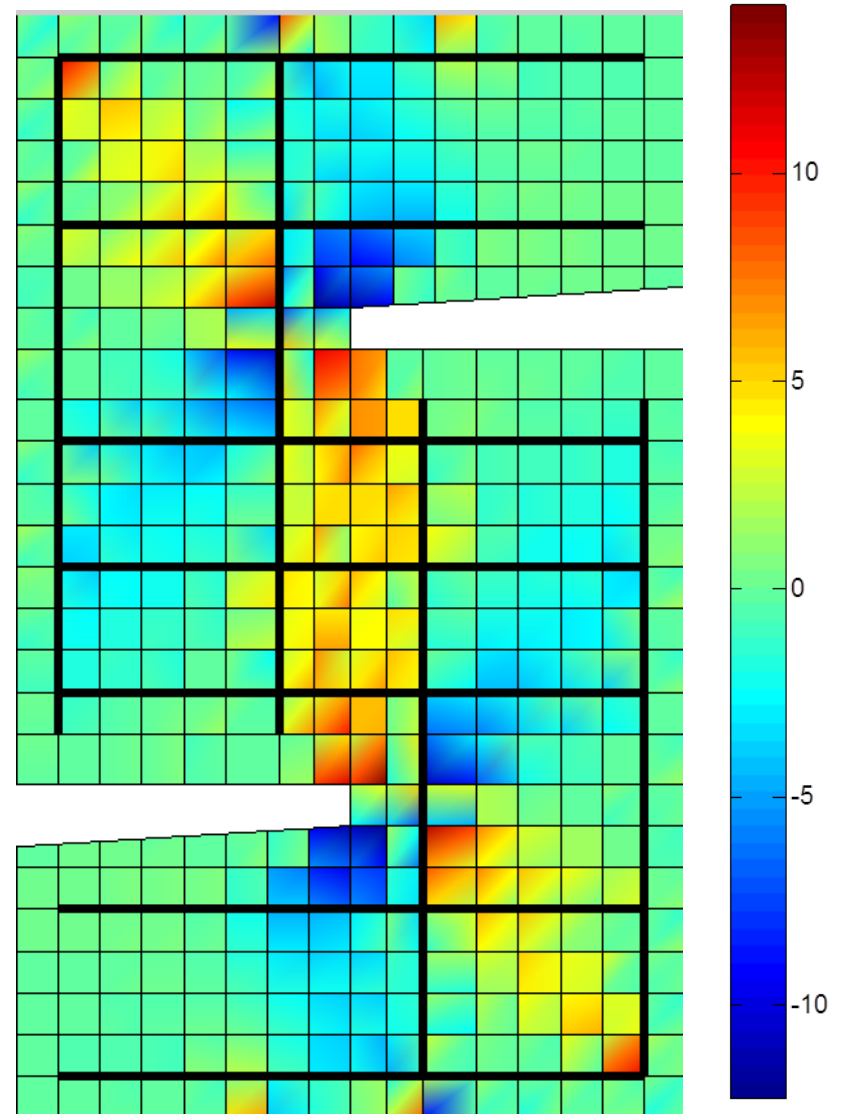
# Curva carga P (KN) desplazamiento impuesto u(mm)



Representación de la sigma y  
post n°: 400

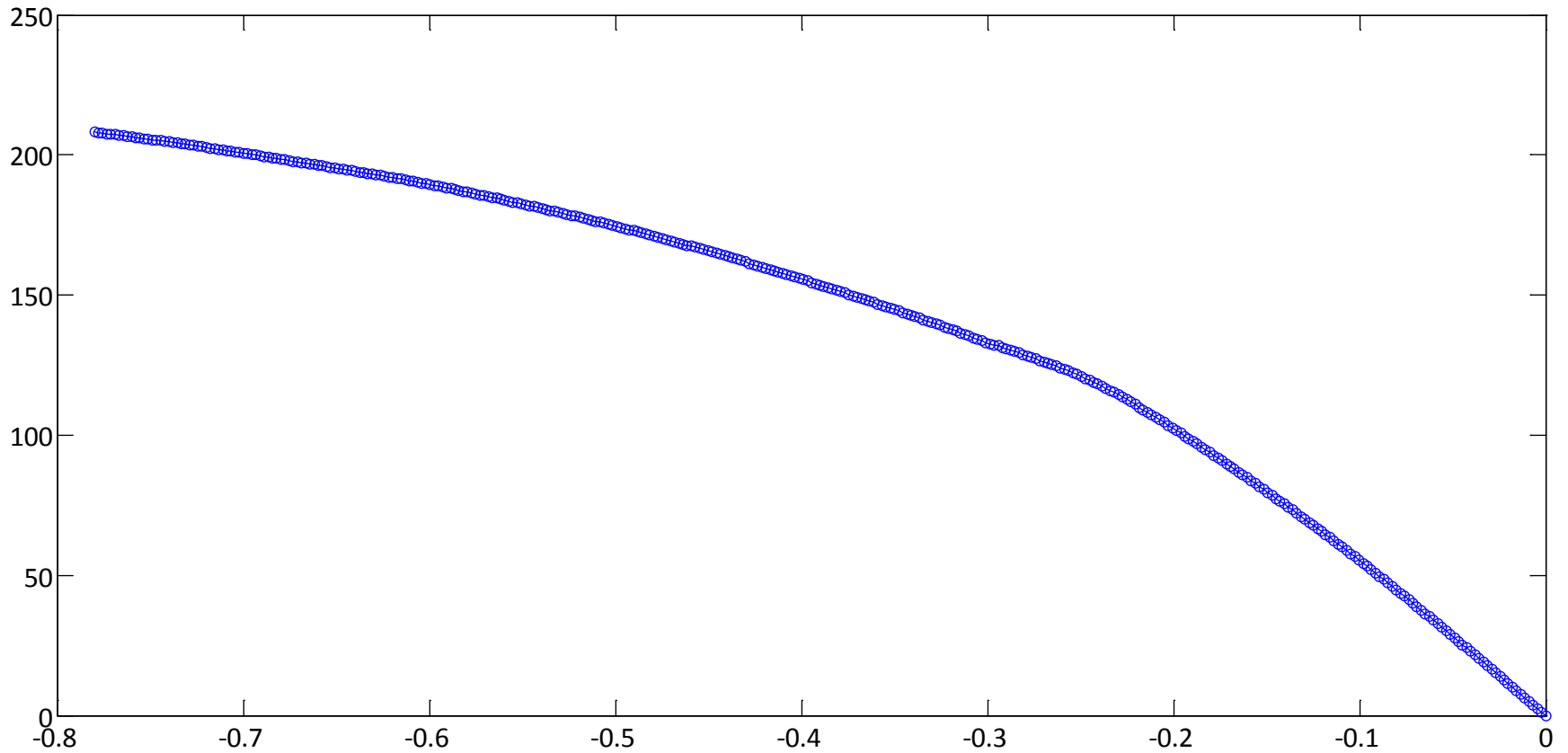


Representación de la tau xy  
post n°: 400

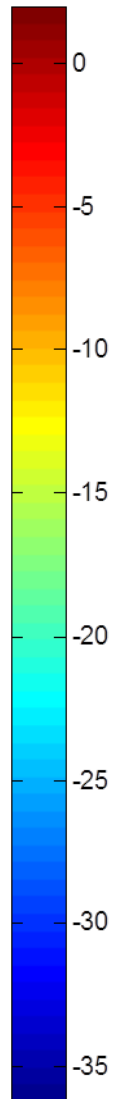
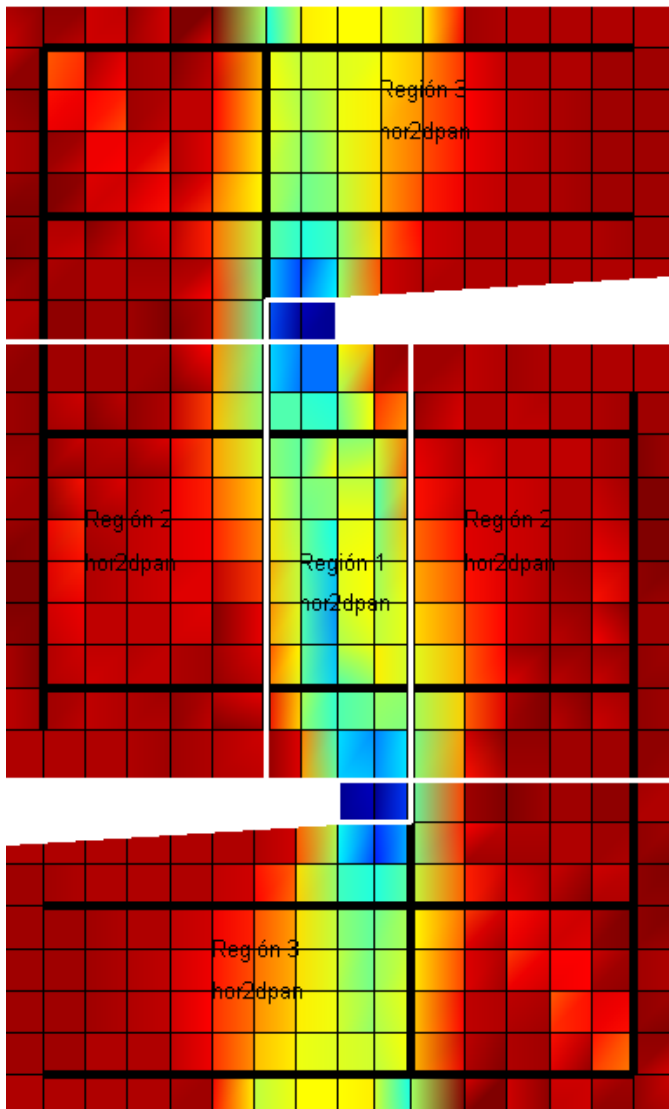


- Elemento Finito: cuad 4 nodos
- Material: hor2dpan
- Armadura: TOTALMENTE Discreta
- Armado: HA-2FI8

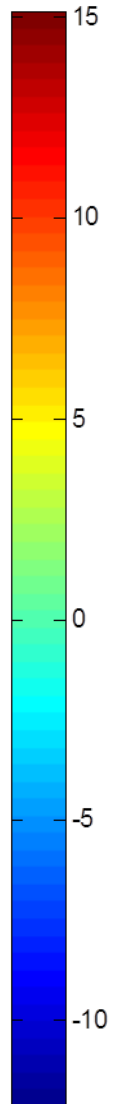
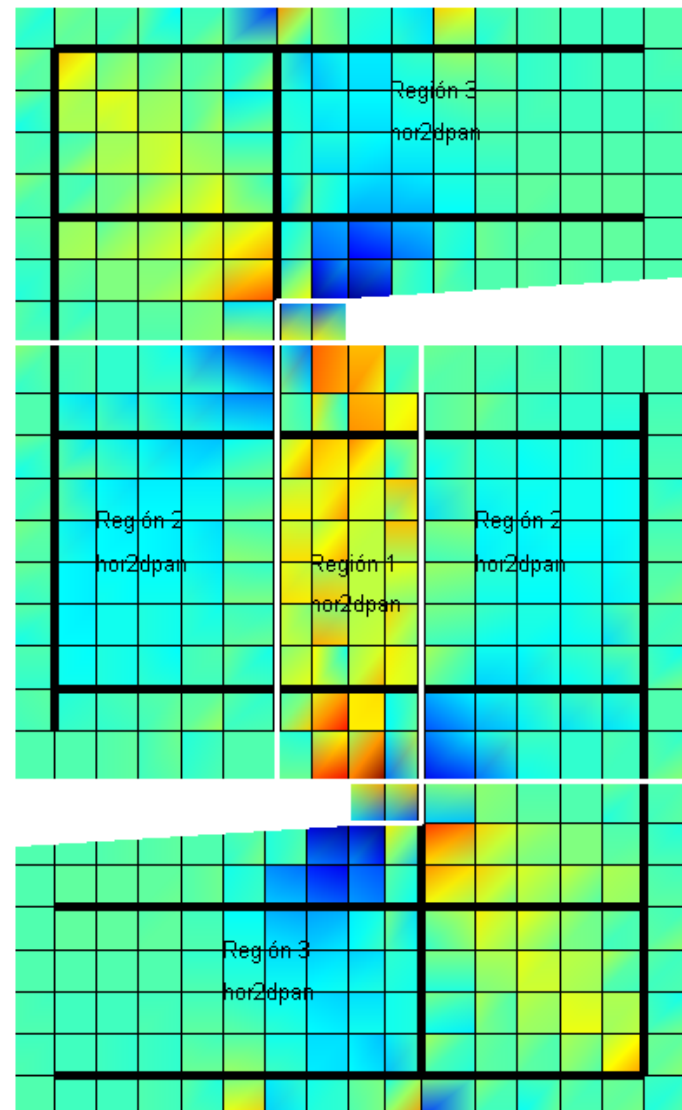
# Curva carga P (KN) desplazamiento impuesto u(mm)



Representación de la sigma y  
post nº: 350



Representación de la tau xy  
post nº: 350





## Anejo D:

# Calibración del programa con el Panel PB21

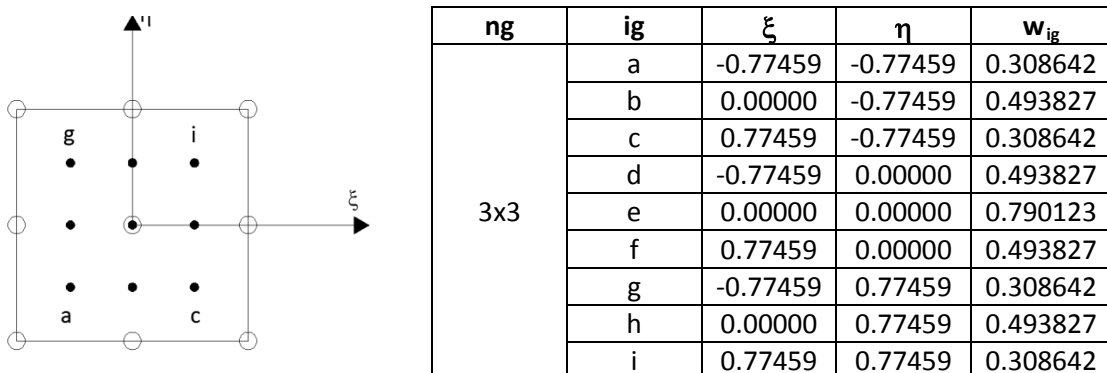
Se procede a la comprobación, por medio de distintos programas, de algunos resultados del cálculo por elementos finitos de un panel. Es decir, se va a calibrar el *FideasLAB* [98], que es el programa que se usa para esta investigación, con un algoritmo propio de comprobación llamado "*comprobación*". Este último algoritmo consiste en una especie de cálculo "manual" a partir de los desplazamientos nodales obtenidos con el *FideasLAB*, de las matrices B, de las deformaciones y de las tensiones para cada punto de integración, de la matriz K del panel y de las fuerzas nodales internas. Ambos programas han sido creados en el entorno matemático *Matlab*.

Por tanto, se calcula un panel por el método de los elementos finitos. Para modelar el panel se usa un único elemento finito. El panel que se modela en esta calibración es el panel PB21 de Bhide and Collins [94].

### 1. Elemento Finito.

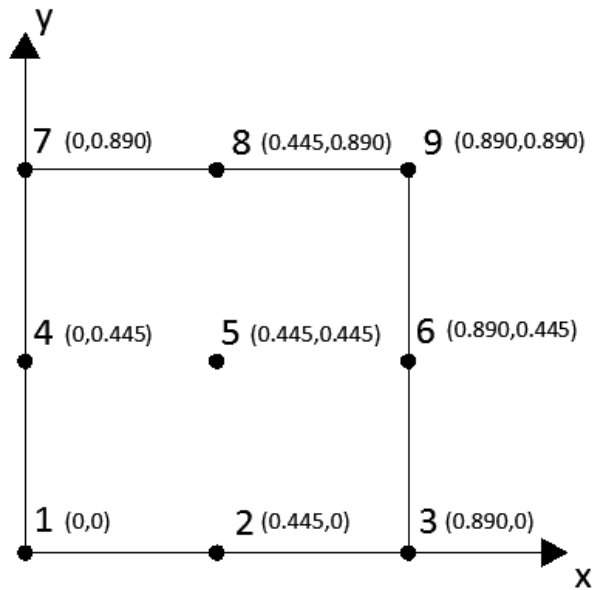
El elemento finito que se usa para modelar el panel es el cuadrilátero de nueve nodos. Para este elemento se usan nueve puntos de integración (ver *tabla D.1*)

*Tabla D.1: Elemento finito expresado en el sistema de coordenadas isoparamétrico.*



## 2. Geometría.

En la *figura D.1* muestra la geometría del panel. Se expresan las unidades en metros:

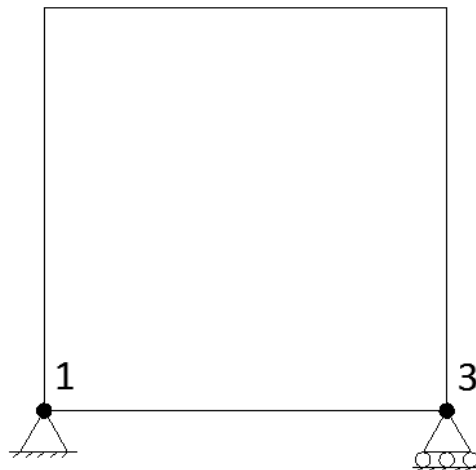


*Figura D.1: Geometría del panel numerada según el orden general de la estructura.*

El panel tiene un espesor de 0.07m.

## 3. Condiciones de contorno.

La *figura D.2* muestra las condiciones de contorno del panel:



*Figura D.2: Condiciones de contorno del panel numeradas según el orden general de la estructura*

#### 4. Condiciones de carga.

La figura D.3 muestra las condiciones de carga del panel:

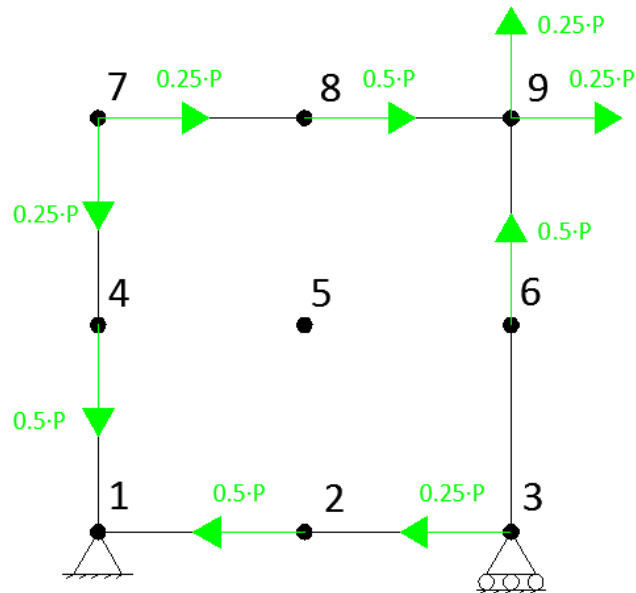


Figura D.3: Condiciones de carga del panel numeradas según el orden general de la estructura.

El valor de P es:  $P = 1.5 \cdot 58000N$

#### 5. Orden de los nodos.

Se definen dos tipos de orden distintos para los nodos (ver figura D.4). Un orden es para numerar el orden general de los nodos dentro de la estructura. En este caso, se entiende que el panel es la estructura. El otro orden, es para numerar el orden local de los nodos dentro del elemento finito. El propósito del orden local es para describir como se han construido las matrices N, B y K en el elemento finito siguiendo este orden. Por tanto, se usa el orden general cuando se quiere referir el panel como estructura y el orden local cuando se modela el panel usando el elemento finito.

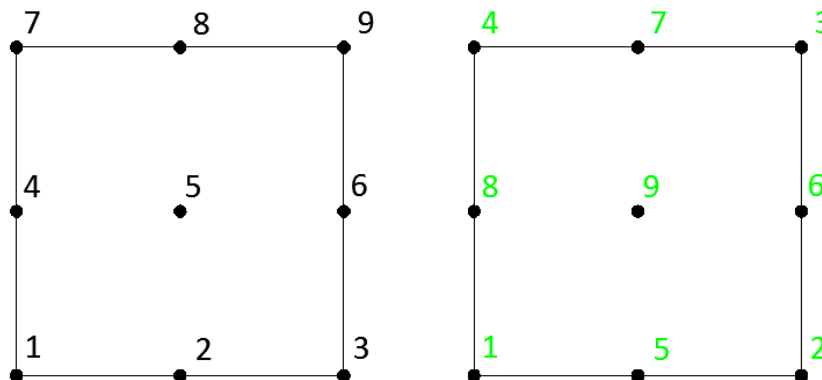


Figura D.4: (izquierda) orden general de la estructura, (derecha) orden local del elemento finito.

## 6. Propiedades del material.

Las propiedades del material que se usan para comprobar el programa son:

$$E = 20000 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0.2$$

Se comprueba el material en su rango elástico.

## 7. Calibración.

Realizada en entorno excel.

## 8. Conclusión.

Se observa que todos los parámetros comprobados son los mismos tanto en el programa *FideasLAB* como en el algoritmo "*comprobación*".

Con ello, se asume que el programa presenta una exactitud suficientemente adecuada para los resultados que se persiguen en este trabajo.

## Anejo E:

### Modelado de vigas de Bresler-Scordelis

En este anejo se muestra el modelado de dos de las vigas de *Bresler-Scordelis* [11] usando el programa *FideasLAB* [98].

Con este anejo se pretende calibrar el programa para ver cómo responde ante el modelado de estructuras tipo viga. De este modo se modelan estructuras más comunes y se compara con los resultados obtenidos por *Vecchio* [14].

Concretamente se modelan las vigas *A1* y *A3* según *Vecchio* [14] con el programa *FideasLAB* de entorno matemático *Matlab*. El modelado se realiza siguiendo el método de los Elementos Finitos.

#### 1. Detalles de las vigas.

En la *tabla E.1* se muestran las características geométricas de las vigas. En la *figura E.1* se expresan las unidades en milímetros:

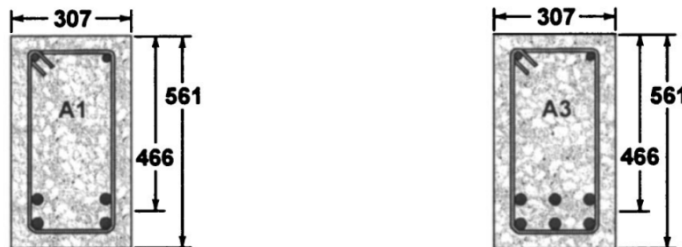


Figura E.1: (izq.) sección transversal viga A1, (der.) sección transversal viga A3 [14]

Tabla E.1: Detalle de la sección transversal de las vigas de Bresler-Scordelis A1 y A3.

Viga	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$L$ (mm)	Vano (mm)	Armadura inferior	Armadura superior	Estribos
A1	307	561	466	4100	3660	4 No. 9	2 No. 4	No. 2 / 210
A3	307	561	466	6840	6400	6 No. 9	2 No. 4	No. 2 / 210

En la *tabla E.2* y en la *tabla E.3* se muestran las características de las armaduras que conforman el armado de las vigas y del hormigón respectivamente:

Tabla E.2: Propiedades del acero que conforma el armado de las vigas de Bresler-Scordelis.

Armado					
Barra	Diámetro (mm)	Área (mm <sup>2</sup> )	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)	$E_s$ (MPa)
No. 2	6.4	32.2	325	430	190
No. 4	12.7	127	345	542	201
No. 9	28.7	645	555	933	218

Tabla E.3: Propiedades del hormigón que conforma las vigas de Bresler-Scordelis.

Hormigón		
Viga	$f'_c$ (MPa)	$f_r$ (MPa)
A1	24.1	3.86
A3	35.1	4.34

## 2. Condiciones de contorno y de carga.

La figura E.2 muestra las condiciones de contorno y de carga de las vigas. Se trata de vigas biapoyadas modeladas realizando un corte por simetría. En el modelo de elementos finitos que se explica más adelante, se describe la forma de modelar la aplicación de la carga.

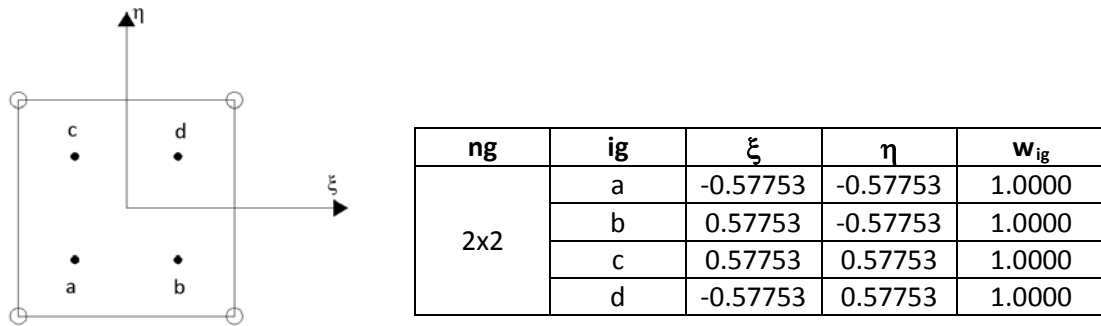


Figura E.2: Condiciones de contorno y de carga de la viga biapoyada en un corte por simetría.

## 3. Análisis por elementos finitos.

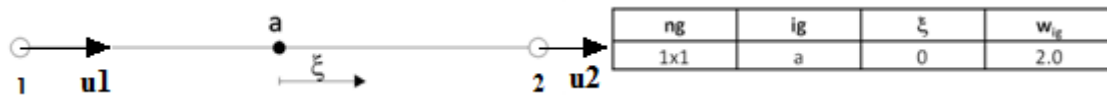
El elemento finito que se usa para modelar las vigas es el cuadrilátero de cuatro nodos y ocho grados de libertad (dos grados de libertad por cada nodo). Para este elemento se usan cuatro puntos de integración (ver tabla E.4)

Tabla E.4: Elemento finito expresado en el sistema de coordenadas isoparamétrico.



El elemento finito que se usa para modelar el armado longitudinal inferior y el superior es el elemento barra. El elemento finito tipo barra se trata de un elemento unidimensional. Aquí se usa, concretamente, la barra de 2 nodos con 1 grado de libertad, es decir, un grado de libertad por nodo (desplazamiento axial  $u$ ). En el caso de la barra de 2 nodos se usa 1 punto de integración (ver tabla E.5).

Tabla E.5: Barra de 2 nodos expresado en el sistema de coordenadas isoparamétrico.



El armado que constituye los cercos se modela como armadura difusa.

En la figura E.3 se muestra el mallado de las vigas. Para la viga A1 se usa una malla de 46x15 elementos finitos tipo cuadrilátero y en la viga A3 se utiliza una malla de 66x15 elementos finitos tipo cuadrilátero.

Para la obtención de las ecuaciones constitutivas se utiliza el modelo de material *hor2dpan* ya descrito en este mismo trabajo.

La forma de modelar la aplicación de la carga es por control de desplazamiento. En este caso se impone un descenso vertical en el punto de aplicación de la carga de 35mm en 70 pasos o escalones de carga.

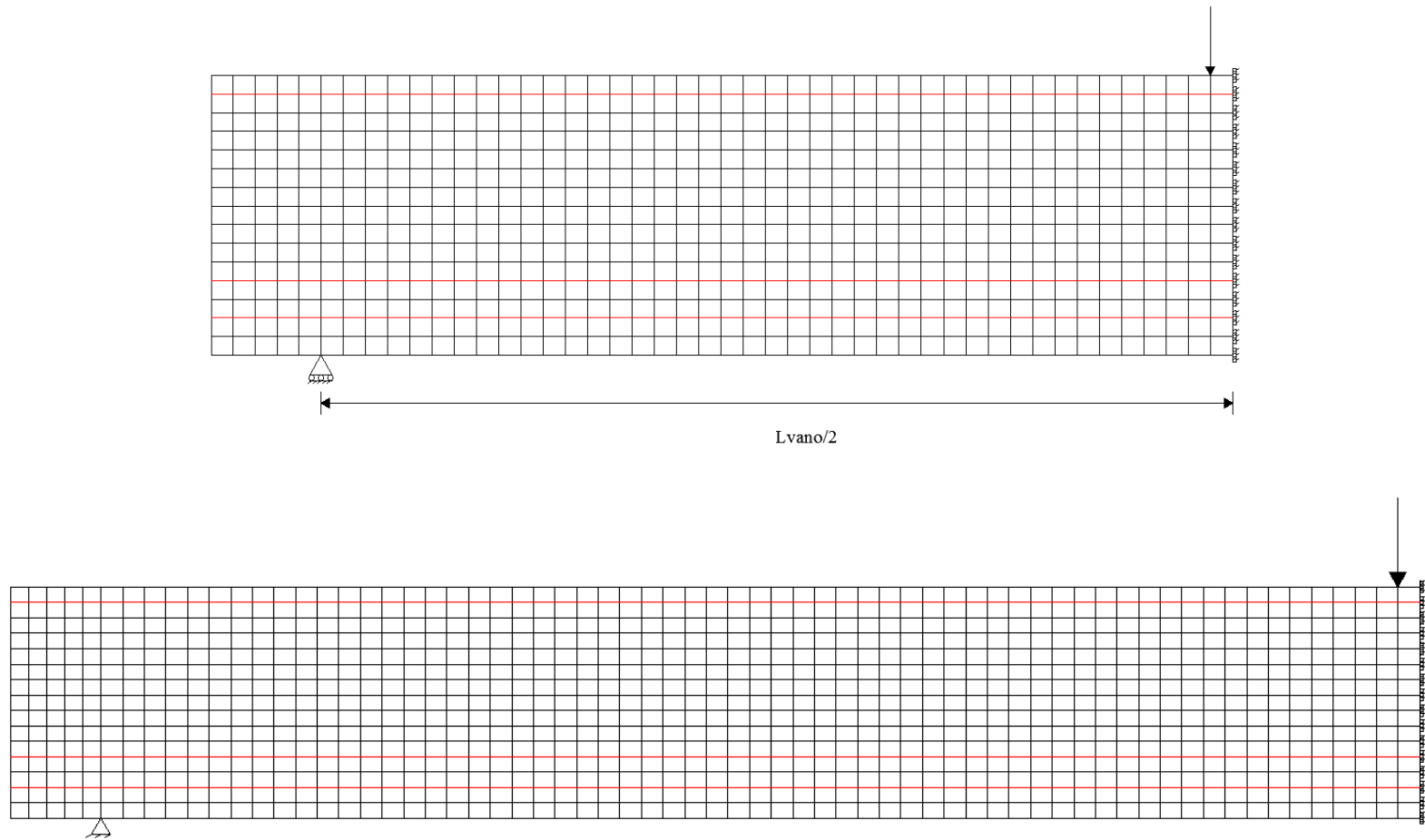


Figura E.3: Mallado de elementos finitos para la viga A1 (arriba) y para la viga A3 (abajo).

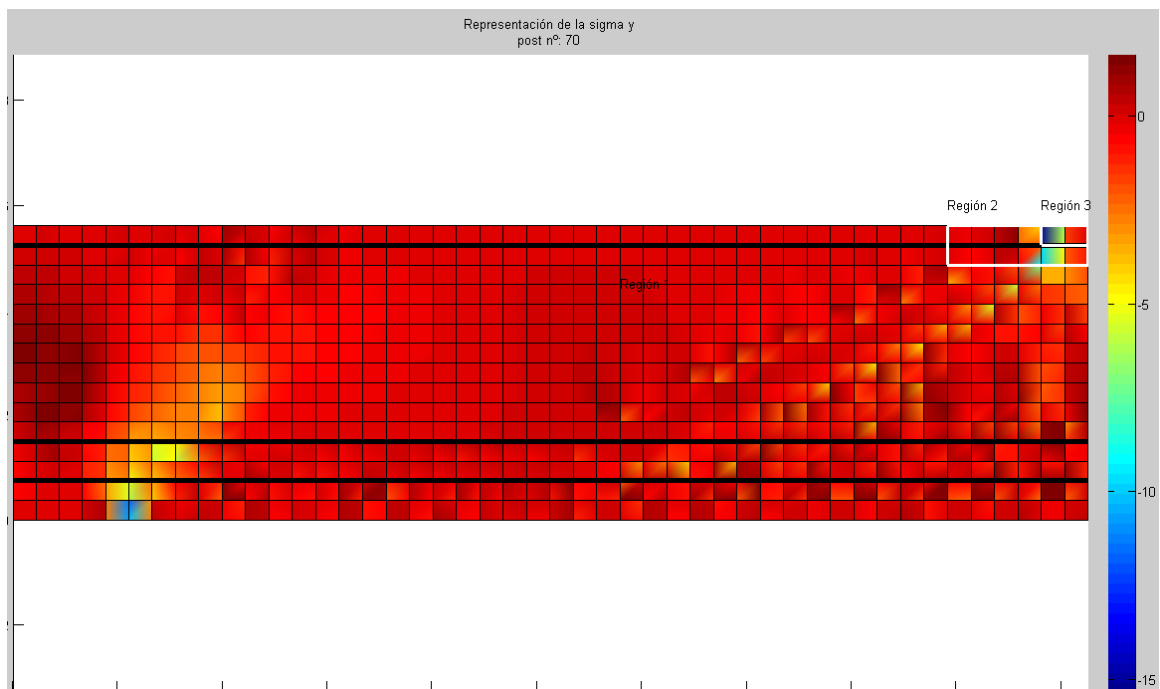
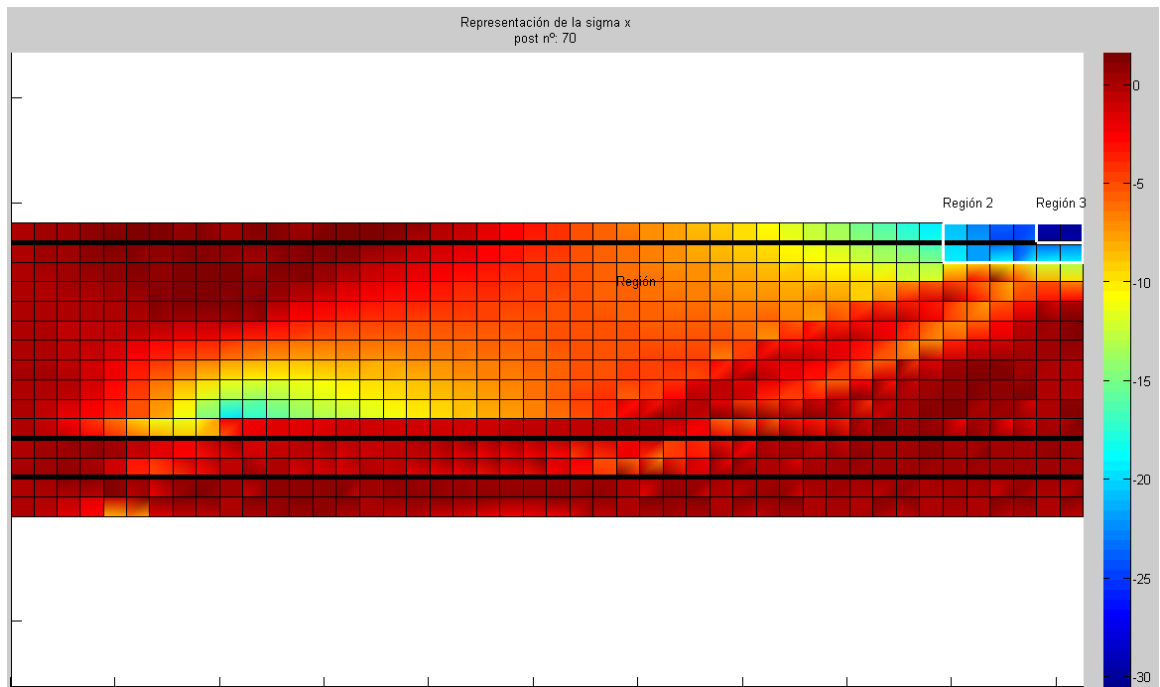


#### **4. Resultados.**

A continuación se muestran algunos de los resultados obtenidos aplicando el modelo de elementos finitos en las vigas *A1* y *A3* aplicando el material *hor2dpan*.

La secuencia de imágenes en cada figura muestra: tensiones en dirección *x*, tensiones en dirección *y*, tensiones tangenciales y patrón de fisuración. Las unidades que se utilizan en las figuras *E.4* y *E.5* son MPa y m. El criterio de signos utilizado es: tensiones  $< 0$  MPa son compresiones.

VIGA A1 CON MATERIAL *hor2dpan*:



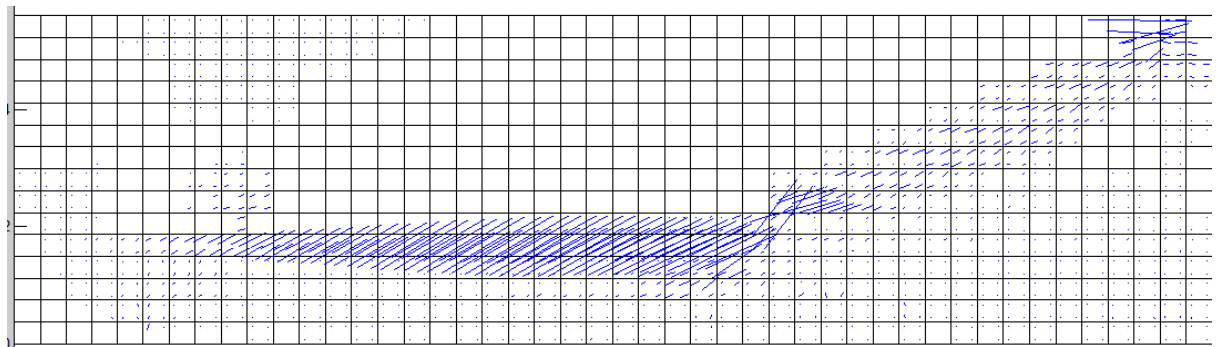
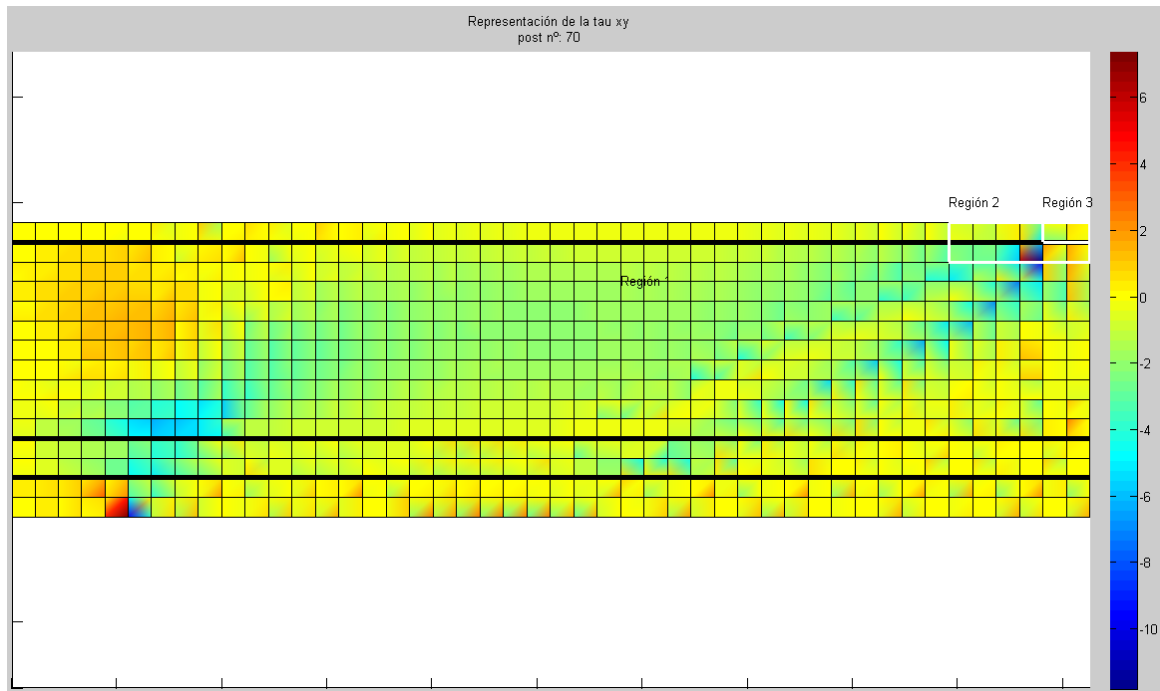
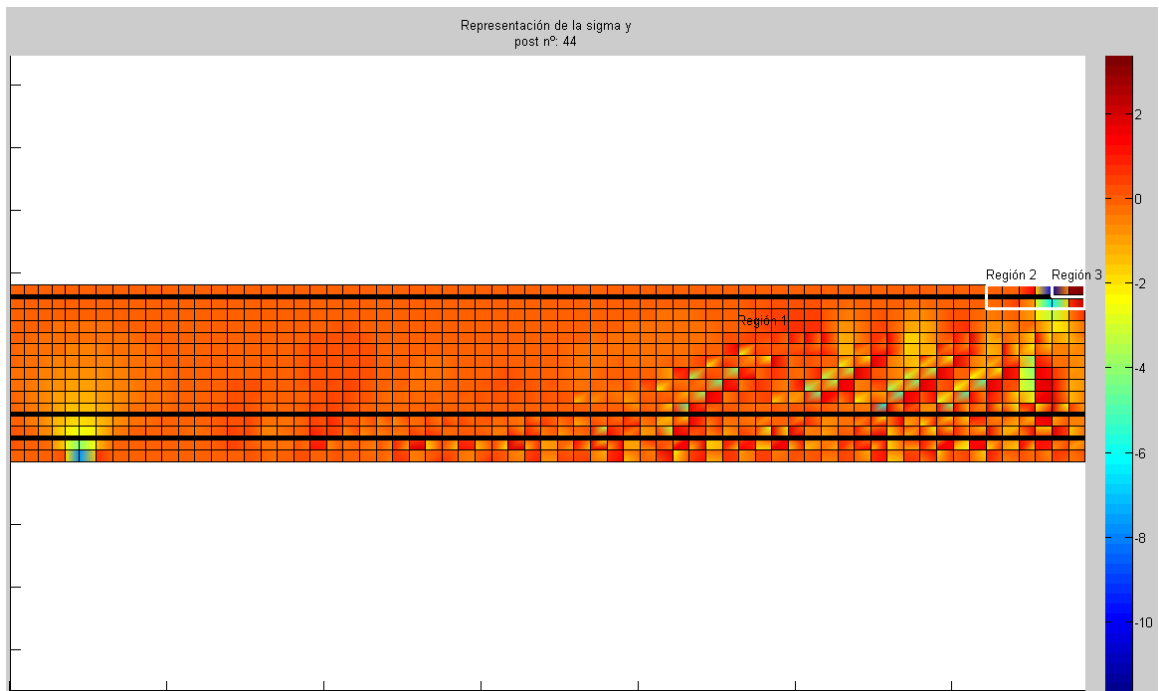
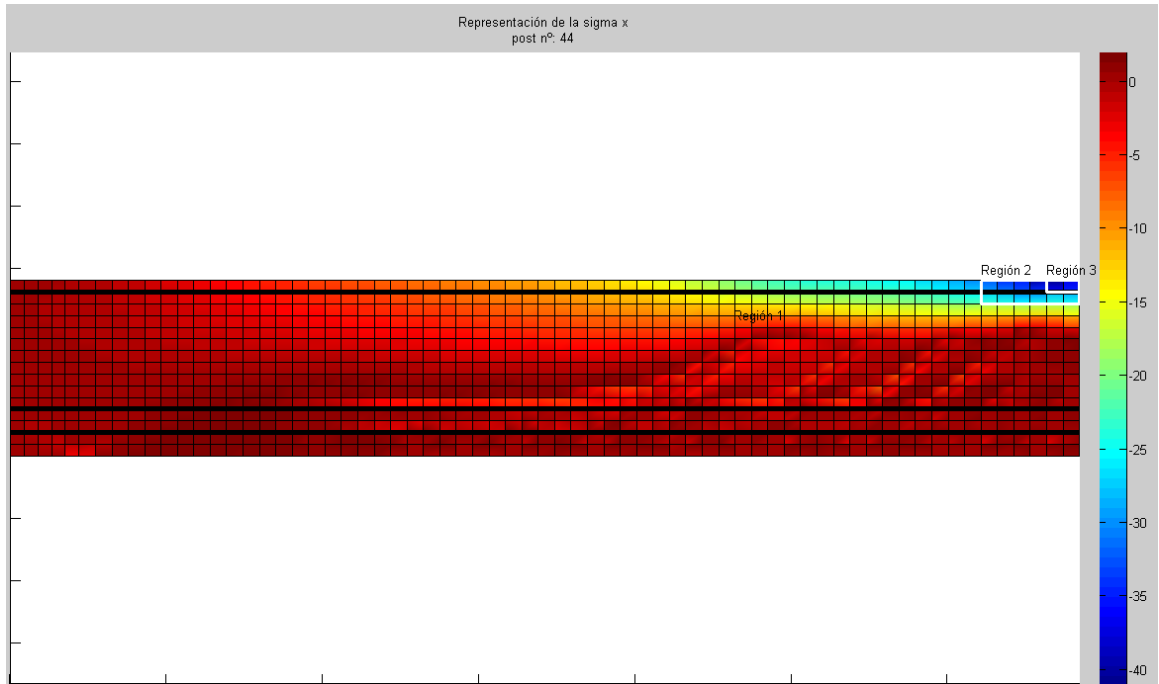


Figura E.4: (de arriba a abajo) tensiones en dirección  $x$ , tensiones en dirección  $y$ , tensiones tangenciales y patrón de fisuración para la viga A1 con material hor2dpan.

VIGA A3 CON MATERIAL *hor2dpan*:



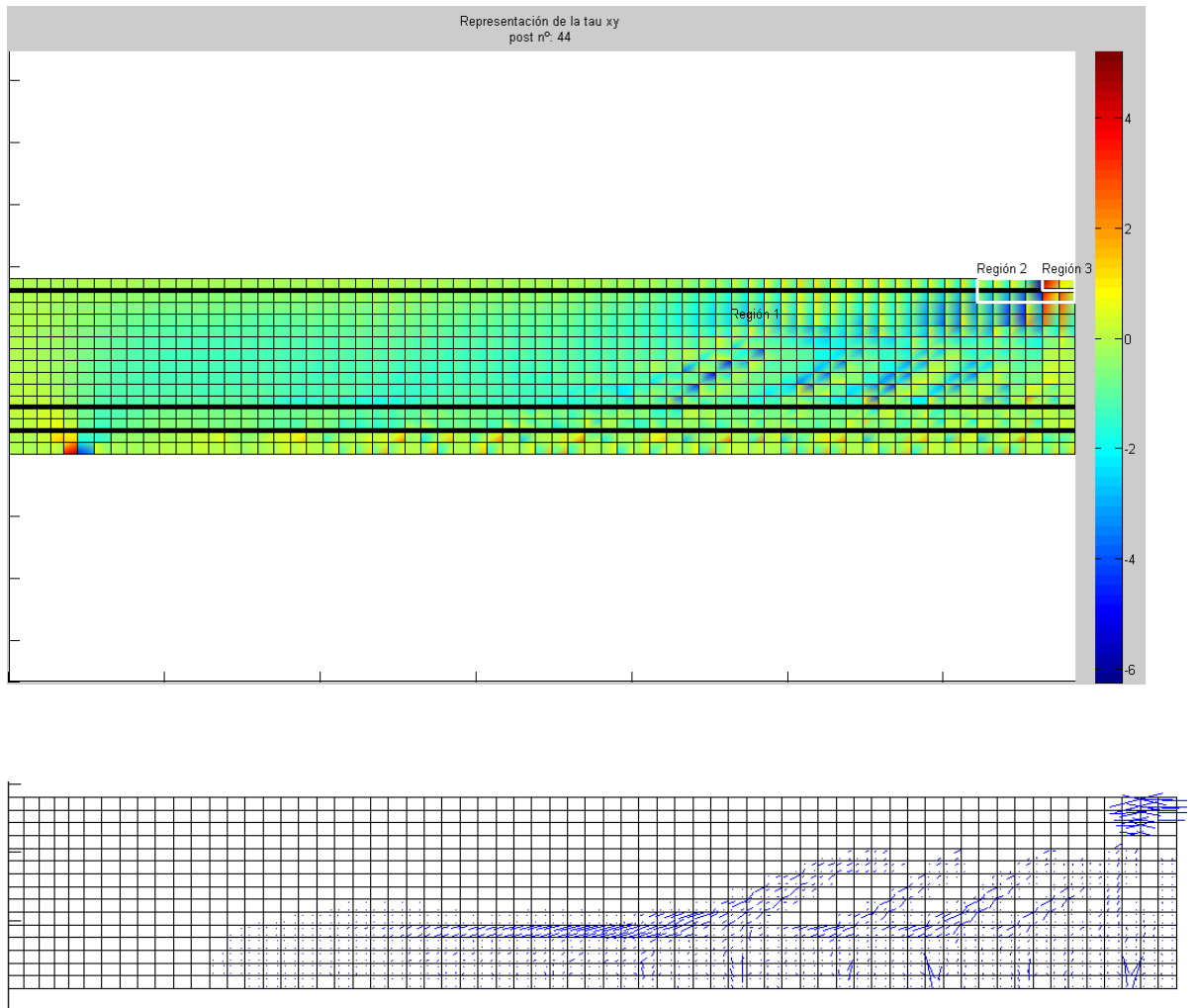


Figura E.5: (de arriba a abajo) tensiones en dirección x, tensiones en dirección y, tensiones tangenciales y patrón de fisuración para la viga A3 con material hor2dpan.

## 5. Comparación de resultados.

En este punto se muestra la comparación de las curvas carga aplicada-desplazamiento para los distintos materiales y la curva de *Bresler-Scordelis* [11], tal y como se muestra en la *figura E.6*.

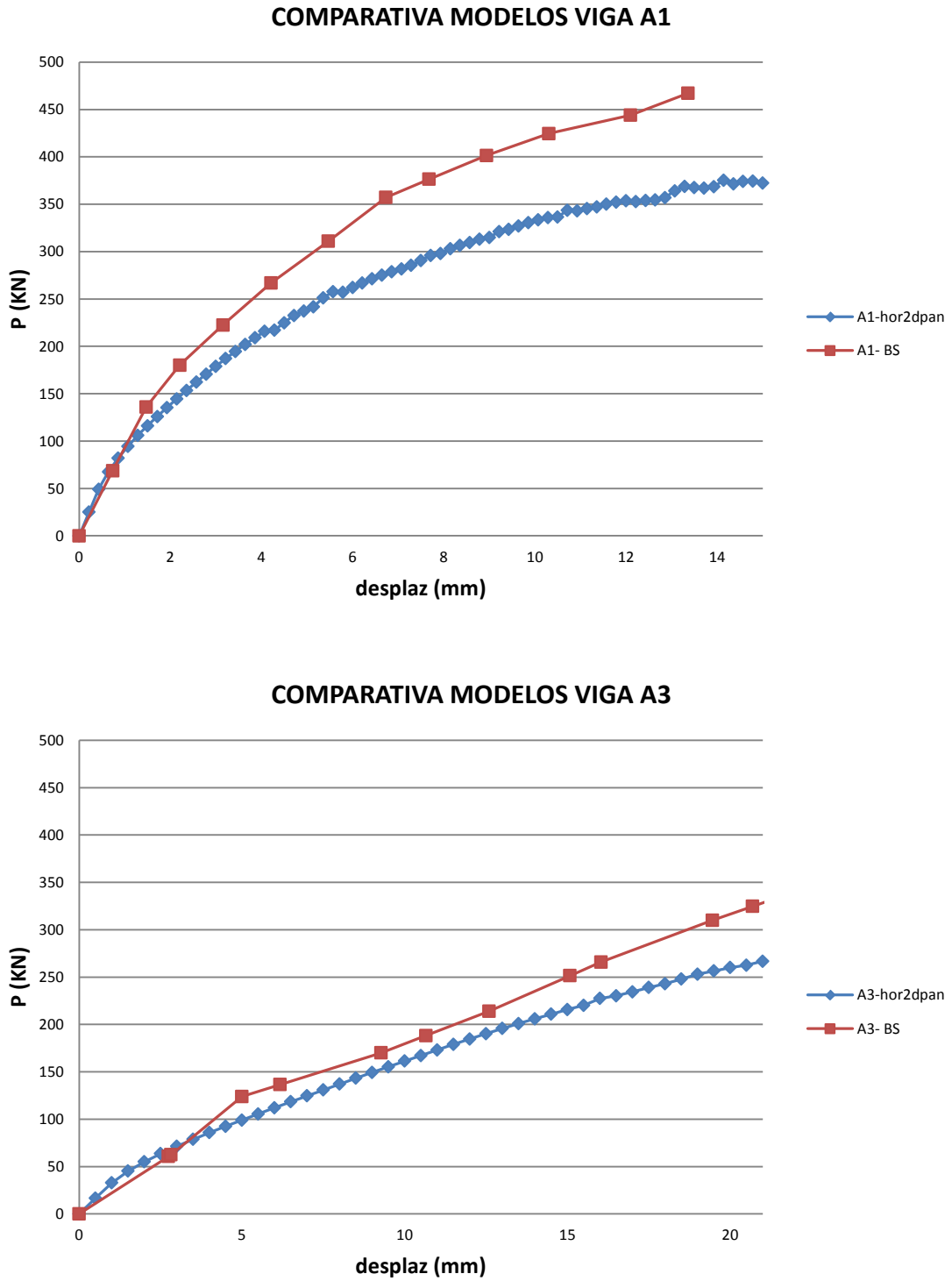


Figura E.6: Gráfica fuerza aplicada-desplazamiento para la viga A1 (arriba) y para la viga A3 (abajo).

## 6. Discusión de resultados.

En el apartado de resultados (*apartado 4*) se puede observar que el modelo representa de una forma bastante acertada el comportamiento tensional que cabría esperarse al someter las vigas a las condiciones de carga especificadas. Tanto el patrón de tensiones como el de fisuras que se obtiene es similar al obtenido por *Vecchio and Shim* [14]. Se observa en la *viga A3* la forma característica de la celosía (ver *figuras E.4 y E.5*).

Al realizar la comparación de resultados (*apartado 5*) entre los resultados carga-desplazamiento obtenidos por *Bresler and Scordelis* [11] y los obtenidos con el modelo *hor2dpan* (ver *figura E.6*), se puede observar una tendencia razonablemente similar, aunque para niveles de carga por encima de 150 KN el desplazamiento que se obtiene con el modelo *hor2dpan* es ligeramente mayor al obtenido por *Bresler and Scordelis* [11].

Con todo ello, se asume que el modelo es suficientemente riguroso para cubrir el objetivo que se persigue en este trabajo.

